

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS,  
INGENIERÍA Y AGRIMENSURA



**TESIS DOCTORAL**

Sobre variaciones del problema de  $k$ -dominación  
en algunas subclases de grafos arco-circulares.

Autora: María Inés Lopez Pujato

Directora: Dra. Valeria Leoni

Co-Directora: Dra. M. Patricia Dobson

Marzo de 2020



*A mi padre y a mi madre, siempre presentes  
con sus enseñanzas, mis ejemplos a seguir.*



## AGRADECIMIENTOS

Al concluir una nueva etapa en mi vida y mirar el camino recorrido sólo tengo hermosos recuerdos y sentimientos de inmensa gratitud. Por ello, quiero agradecer a todas aquellas personas que me ayudaron a recorrer este trayecto y contribuyeron a que hoy pueda ser Doctora en Matemática.

Gracias a mí amada familia:

A papá y mamá, a mis hermanas, hermanos, cuñadas, cuñados, sobrinos y sobrinas. Gracias por ser mi sostén, mis amigos, mis consejeros. Gracias porque, si bien algunos viven lejos, siempre están para lo que se los necesite. Gracias por ser tan unidos.

A mi novio Roberto, gracias por acompañarme en todos estos años, por tus consejos, por alentarme a seguir adelante en cada paso del doctorado, por tu comprensión y tu apoyo incondicional. Gracias porque siempre deseas lo mejor para mí.

A mi abuela, la Abuela Mami, gracias por tus conversaciones y por los tantos libros de matemática que me regalaste del abuelo, quien, como me contabas, también dedicó gran parte de su vida a la matemática.

En especial, nuevamente, gracias mamá y papá. Siempre alentándome y dándome la confianza necesaria para seguir creciendo. Mamá, partiste al cielo antes de que terminara el doctorado; eso sí se me hizo difícil. Pero siempre sigues acompañándome, como lo hace también papá. ¡Gracias!

Gracias infinitas a mi Directora Valeria Leoni y Co-directora M. Patricia Dobson por su dedicación, su compromiso, sus conocimientos, sus aportes, sus horas y horas de trabajo dedicadas a mí. Gracias porque por Ustedes esto fue posible. Aprendí mucho y, lo más importante, disfruté aprender. ¡Gracias por Todo!

Mi gratitud hacia los jurados por su dedicación al leer esta Tesis, por sus enriquecedores comentarios y contribuciones.

Agradezco también a la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, a su personal docente y no docente por hacer posible todos estos años de formación académica. En particular, doy gracias a los docentes de las materias del Doctorado por haber contribuido en mi aprendizaje y también a aquellos que me han aconsejado ante alguna consulta, entre ellos mi Directora, mi Co-directora, a Graciela Nasini y mi cuñado Pablo Fekete.

Mi gratitud hacia las personas que hicieron posibles mi estadía en Eslovenia y participación en diversos congresos; en especial a los investigadores con quienes he trabajado y a aquellos que con sus observaciones y comentarios contribuyeron al avance de mi Tesis doctoral.

---

Gracias también a mis amigas y compañeras tanto de la facultad como fuera de ella, con las cuales he compartido tantas horas de estudio y trabajo, congresos, charlas, contribuyendo a que esta etapa sea llevadera y hermosa.

Finalmente agradezco a Dios y María por estos años vividos y por los logros alcanzados.

María Inés.

## **JURADOS**

Dra. Liliana Alcón

Dra. Silvia Bianchi

Dr. Guillermo Durán

Dra. Flavia Bonomo

Dr. Oscar Min Chih Lin



# Resumen

Los resultados de esta tesis se enmarcan dentro del área de la Optimización Combinatoria. Principalmente, se conjugan técnicas asociadas a las áreas de Complejidad Computacional, Algoritmos y Teoría de Grafos, entre otras.

Se exponen los resultados obtenidos luego del estudio de la complejidad computacional para cada número entero positivo  $k$  fijo, de las siguientes variantes del problema clásico de dominación en grafos en algunas subclases de los grafos arco-circulares:  $k$ -upla dominación,  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total. Para  $k = 1$ , todas ellas coinciden con el concepto usual de dominación, 1-dominación o dominación total en grafos. Desde el punto de vista de la complejidad computacional de problemas de decisión, estas variantes de la dominación clásica son “difíciles” de resolver. Como es habitual, se planteó entonces estudiar subclases donde los problemas sean tratables, es decir, resolubles a través de un algoritmo eficiente (de tiempo de ejecución u orden polinomial en el tamaño de las instancias).

Se investigaron instancias dadas por clases de grafos para los cuales existen en la literatura algoritmos que resuelven el problema para  $k = 1$  en tiempo polinomial y que su tratamiento estaba abierto para los restantes valores de  $k$  enteros o bien, que disponen de un tal algoritmo pero el mismo es poco eficiente en algún sentido.

Si bien los problemas abordados generalizan los diferentes conceptos de dominación, los algoritmos que presentamos en esta tesis no son una generalización de los existentes en la literatura para el problema de dominación usual.

Aún notando que la diferencia en las definiciones de los problemas estudiados es muy sutil, la estructura intrínseca de cada clase de grafos abordada mostró que en general no es sencillo, o bien no es posible, aplicar el mismo tratamiento a las tres variantes del problema estudiado en esas clases.

Más precisamente, en esta tesis se desarrollan: para la  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total y sus versiones ponderadas, un algoritmo específico de orden polinomial en función de  $k$  para la clase de los grafos de intervalos propios; para la  $k$ -upla dominación, sendos algoritmos eficientes para dos subclases de grafos arco-circulares, la de los grafos co-biconvexos y la de los grafos web, instancias para las que no se contaba hasta el momento con un algoritmo de resolución.



# Introducción



---

Muchos problemas de interés práctico y teórico, como lo son los problemas de locación de servicios, requieren cubrir objetos. Más precisamente, se puede requerir cubrir con el menor número posible de sensores cierta zona para ser monitoreada, teniendo en cuenta que pocos sensores cercanos a un determinado lugar pueden no realizar un monitoreo completo. Esta circunstancia particular y muchos otros casos referentes a situaciones de locación de servicios pueden ser modeladas a través de ciertas variaciones de la dominación usual en grafos. Las variaciones de dominación en grafos forman un área muy vasta de la teoría de grafos, con numerosos problemas desafiantes [43, 44].

Las variaciones de la dominación clásica que abordamos en este trabajo son las siguientes: para un entero positivo  $k$ , la  $k$ -dominación, la  $k$ -dominación total y la  $k$ -upla dominación, algunas de éstas en sus variantes ponderadas. A continuación se introducen estas nociones, para un entero no negativo  $k$  y un grafo  $G$  dados.

Un conjunto  $D$  de vértices de un grafo  $G$  es  $k$ -dominante ( $k$ -dominante total) si todo vértice de  $G$  que no está en  $D$  (todo vértice de  $G$ ) es adyacente a al menos  $k$  vértices de  $D$ . Desde el punto de vista de la complejidad computacional de problemas de decisión, el problema de hallar un conjunto  $k$ -dominante ( $k$ -dominante total) en  $G$  del menor tamaño posible, para cada  $k$  fijo, es NP-difícil en grafos generales.

Por otra parte, un conjunto  $D$  de vértices de  $G$  es una  $k$ -upla dominante en  $G$  si todo vértice de  $G$  es adyacente a al menos  $k$  vértices de  $D$ , ó es un vértice de  $D$  y es adyacente a al menos  $k - 1$  vértices de  $D$ . Para cada  $k$  fijo, también el problema de hallar un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  del menor tamaño posible, para cada  $k$  fijo, es NP-difícil en grafos generales y aún en grafos cordales.

A continuación desarrollamos un pequeño análisis para remarcar las diferencias entre los conceptos mencionados. Recordando que un vértice de un grafo se domina a sí mismo como así también a todos los vértices adyacentes (o vecinos) a él, en el caso de un conjunto  $k$ -upla dominante  $D$  en  $G$ , la definición impone una condición que deben cumplir todos los vértices del grafo; dicha condición puede expresarse imponiendo que cada vértice domine a al menos  $k$  vértices del conjunto  $D$ . En cambio, para la definición de conjunto  $k$ -dominante total en  $G$ , aunque la definición impone una condición a todos los vértices del grafo, dicha condición puede expresarse pidiendo que cada vértice de  $G$  domine a al menos  $k$  vértices del conjunto  $D$  distintos a él. Finalmente, para la noción de conjunto  $k$ -dominante, la condición correspondiente impone solo a los vértices que se encuentran fuera del conjunto  $k$ -dominante que dominen a al menos  $k$  vértices de ese conjunto.

Estas diferencias expuestas hacen que los problemas considerados requieran tratamientos diferenciados para su análisis. Incluso, si bien son todos problemas NP-difíciles de resolver en general, se conocen de la literatura instancias dadas por clases de grafos en las cuales cierta variación del problema es difícil de resolver mientras que otra no lo es. Por esta razón, todo aporte que se realice para avanzar en el conocimiento de la complejidad computacional de estos problemas, marca un avance hacia una prueba de dónde se encuentra una barrera que separa a un problema de otro, o bien, hacia una prueba de la equivalencia polinomial

---

entre ellos.

Cuando se abordan problemas NP-difíciles es importante la determinación de clases de grafos donde los mismos pueden ser resueltos en un tiempo computacional razonable (polinomial) en función del tamaño del grafo de entrada. Otra línea de estudio sobre problemas difíciles de resolver, es diseñar para instancias que poseen un algoritmo de resolución, nuevos algoritmos que, o bien mejoren el tiempo de resolución del mejor algoritmo existente, o sean de más sencilla implementación que cualquiera de los existentes.

Estos tópicos motivaron los objetivos de investigación en esta tesis.

## Antecedentes y estado actual del tema

El concepto de dominación en grafos fue introducido por Claude Berge en 1958 [6] y desde entonces, estudiado en muchos trabajos. Numerosas variantes de este concepto fueron surgiendo con el correr de los años. Algunas de esas variantes son las que se estudian en este trabajo.

Dado un entero positivo  $k$ , el problema de  $k$ -dominación, el de  $k$ -dominación total y el de  $k$ -upla dominación tienen como objetivo encontrar el tamaño mínimo de un conjunto  $k$ -dominante,  $k$ -dominante total o  $k$ -upla dominante, respectivamente en un grafo dado.

La noción de  $k$ -dominación fue introducida por Fink y Jacobson en 1985 [34] y estudiada en una serie de artículos (por ejemplo, [17, 18, 27, 33, 40, 55]). La noción de  $k$ -dominación total fue introducida por Kulli en 1991 [54] y estudiada bajo el nombre de  *$k$ -upla dominación total* por Henning y Kazemi en 2010 [45] y en una serie de artículos recientes [51, 68, 56]. Por otra parte, la terminología  $k$ -upla dominación fue introducida en 2000 por Harary y Haynes [42] y estudiada en algunos trabajos [1, 2, 29, 56, 57, 67].

Las diferencias en sus definiciones hacen que estos problemas sean de gran utilidad en varias aplicaciones, por ejemplo, en la asignación de diferentes tipos de recursos, en la distribución en sistemas informáticos (ver, por ejemplo, [43]) o en la ubicación de servicios de diferente naturaleza. Sin embargo, cuando pensamos en sus resoluciones, se sabe que desde el punto de vista de la complejidad computacional, todos ellos son problemas NP-difíciles [50, 58, 68] y también difíciles de aproximar [23].

## Sobre $k$ -dominación y $k$ -dominación total

A continuación se resumen los antecedentes relativos a la complejidad computacional para los problemas de  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total ( $k$  fijo).

El problema de  $k$ -dominación es NP-difícil en las clases de grafos bipartitos [4] y grafos split [55] y se puede resolver en tiempo lineal en la clase de grafos donde cada block es una clique, un ciclo o un grafo bipartito completo (incluidos árboles, grafos block, cactus y grafos cactus-block) [55], y, más generalmente, en cualquier clase de grafos con clique-width acotado [26, 65] (ver también [22]).

---

El problema de  $k$ -dominación total es NP-difícil en las clases de grafos split, en grafos doblemente cordales y en grafos bipartitos [68], en grafos caminos [56], y para  $k \in \{2, 3\}$  en la clase de grafos bipartitos planares [2]. Por otra parte, se puede resolver en tiempo lineal en la clase de grafos donde cada block es una clique, un ciclo o un grafo bipartito completo [56], y, más generalmente, en cualquier clase de grafos con clique-width acotado [26, 65], y en tiempo polinomial en la clase de grafos bipartitos cordales [68].

A su vez, ambos fueron también estudiados respecto de sus propiedades de inaproximabilidad, en grafos generales en [23] y en subclases particulares en [4], como así también desde el punto de vista de la complejidad parametrizada [13, 48].

Para los problemas usuales de dominación y de dominación total (es decir, cuando  $k = 1$ ) se conoce que pueden resolverse en tiempo lineal en la clase de grafos de intervalos ([8, 14, 47] y [14, 15, 52, 69, 70], respectivamente).

Otras variantes de problemas de dominación que no abordamos en esta tesis se pueden resolver en tiempo polinomial en la clase de los grafos de intervalos propios, entre ellos se encuentran la dominación conexa [69], la dominación independiente [32], la dominación emparejada [19], dominación eficiente [16], la dominación del mentiroso [66], la dominación restringida [67], la dominación eterna [10], la dominación de poder [59], la dominación conectada externamente [63], la dominación romana [60] y la dominación Grundy [11].

Pero para la  $k$ -dominación total y  $k$ -dominación, no se contaba hasta ahora para  $k \geq 2$ , con algoritmos específicos que los resuelvan en la clase de los grafos de intervalos propios. Solo podemos decir que es posible resolverlos en tiempo de ejecución polinomial en la superclase de los grafos de intervalos a partir de resultados desarrollados en un contexto más general. En efecto, se conocen los siguientes resultados:

- i. Para una gran clase de problemas de partición de vértices y subconjuntos de vértices, en [12] se presenta un algoritmo ejecutable en tiempo  $\mathcal{O}(n^4 \cdot nec_d(T, \delta)^3)$ , donde  $n$  es el orden del grafo de entrada,  $d$  es un parámetro asociado al problema y  $nec_d(T, \delta)$  es el número de clases de equivalencia de una relación de equivalencia específica del problema, definida en un árbol de descomposición dado  $(T, \delta)$  de  $G$ .
- ii. Belmonte y Vatshelle muestran en [5, Lemma 3] que dado un grafo de intervalos  $G$  con  $n$ -vértices y un entero positivo  $d$ , se puede calcular en tiempo polinomial (de hecho, lineal) un árbol de descomposición  $(T, \delta)$  de  $G$  con  $nec_d(T, \delta) \leq n^d$ .
- iii. Para los problemas de  $k$ -dominación y de  $k$ -dominación total puede verse que  $d = k$ .

A partir de estos resultados mencionados podemos decir que los problemas de  $k$ -dominación total y  $k$ -dominación es posible resolverlos en tiempo de ejecución  $\mathcal{O}(n^{3k+4})$  en la clase de los grafos de intervalos, superclase de los grafos de intervalos propios, donde  $n$  es el orden del grafo de entrada. Remarcamos que este orden se puede deducir de los recientes trabajos [5, 12] desarrollados en un contexto general como una consecuencia de los resultados que se enumeraron arriba (i. a iii.).

---

Cabe destacar que la deducción de un algoritmo específico para nuestros problemas y su correspondiente implementación a partir de lo detallado en i. a iii. no es sencilla ni directa.

Por esa razón, uno de los objetivos de esta tesis fue encontrar algoritmos específicos para la  $k$ -dominación y la  $k$ -dominación total para los grafos de intervalos propios.

## Sobre $k$ -upla dominación

A continuación se resumen los antecedentes relativos a la complejidad computacional para los problemas ( $k$  fijo) de la  $k$ -upla dominación que, como podrá verse, no son demasiados en relación a los dos problemas anteriores.

El problema de la  $k$ -upla dominación es NP-completo incluso para los grafos cordales [58]. Algoritmos eficientes para cada  $k$  son conocidos solo para la clase de grafos fuertemente cordales [58], para los grafos  $P_4$ -tidy [29] y para los grafos con clique-width acotado [3].

En particular, en la clase de los grafos de intervalos propios, como éstos son fuertemente cordales, puede decirse que el problema puede resolverse eficientemente para cada valor de  $k$  siguiendo el algoritmo en [58] recién mencionado. Constituyen entonces los grafos de intervalos propios, la subclase maximal de grafos cordales que conocemos en los que el problema puede resolverse de manera eficiente. Los grafos de intervalos propios fueron caracterizados por Roberts [71] como aquellos grafos cuyas matrices de adyacencia ampliada tienen la propiedad de los 1's consecutivos por columnas (propiedad definida en [35]).

Con respecto a la clase de los grafos arco-circulares, superclase de la de intervalos propios, en [14] y [47] se presentan algoritmos eficientes que resuelven el problema correspondiente solo para  $k = 1$ .

Desde el punto de vista práctico, los grafos arco-circulares son de interés en estudios relacionados a la teoría de codificación debido a su relación con los códigos “circulares” [75] y en el testeo para la disposición circular de moléculas genéticas [53].

Desde el punto de vista teórico, han recibido considerable atención desde 1964 en una gran cantidad de trabajos de investigación. Varias subclases han sido también estudiadas, entre ellas, están los unitarios, los propios y más recientemente, los arco-circular Helly, los co-bipartitos y los concave-round, entre otros. En estos estudios se han formulado caracterizaciones y algoritmos de reconocimiento para los grafos arco-circulares y sus subclases. En particular, es importante remarcar que se cuenta con algoritmos de reconocimiento en tiempo lineal para todas estas subclases mencionadas [9, 31, 46, 61, 62, 64].

Estudiar las variantes de dominación que abarcamos en esta tesis en grafos arco-circulares es un problema abierto de interés actual que en sí mismo presenta muchos desafíos.

---

## Descripción de los objetivos generales y los resultados obtenidos

El objetivo general de esta tesis es el diseño de algoritmos específicos de resolución de tres variaciones del problema de dominación usual en grafos en algunas subclases de grafos arco-circulares.

Para los problemas de  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total, en esta tesis se comienza trabajando sobre los grafos de intervalos propios. Usando fuertemente su estructura e inspirados en el trabajo en [7] para la dominación usual ( $k = 1$ ), diseñamos sendos algoritmos específicos para todo  $k$ , cuyo orden de convergencia es  $\mathcal{O}(n^{4k+1})$ , donde  $n$  es el orden del grafo de entrada. Para  $k = 2$  y  $k = 3$ , este orden de convergencia es mejor o igual que  $\mathcal{O}(n^{3k+4})$ , orden del único algoritmo que puede encontrarse en la literatura y que fue desarrollado para otro tipo de problemas en un contexto más general. Además, para cualquier valor de  $k$  fijo, nuestro algoritmo es de fácil implementación. El enfoque se basa en una reducción que muestra que para cada entero positivo  $k$ , el problema de la  $k$ -dominación total en un grafo de intervalo propio dado  $G$  se puede reducir a la búsqueda de un camino más corto en un grafo acíclico dirigido ponderado derivado del grafo de entrada. Una reducción similar funciona para el problema de la  $k$ -dominación. Cabe destacar que el trabajo [20] derivado de esta tesis (ver más abajo en Difusión de resultados), muestra que con una implementación adecuada, el orden de nuestros algoritmos se puede mejorar a  $\mathcal{O}(n^{3k})$ . Decidimos no incluir esta mejora en esta tesis para no desviar nuestra atención de los objetivos planteados, pudiéndose encontrar las demostraciones e implementación de esta mejora en [20].

A continuación de lo realizado hasta este punto, decidimos abordar el estudio de la  $k$ -upla dominación también en la clase de los grafos de intervalos propios, ya que solo para  $k = 1$  y  $k = 2$  se cuenta en la literatura con un algoritmo específico para este problema en esta clase. Pero como puede deducirse de la definición, la noción de  $k$ -upla dominación involucra a las vecindades cerradas del grafo dado, en lugar de las vecindades abiertas como en las otras dos variaciones de dominación estudiadas. Luego de un estudio profundo de trabajos de A. Tucker sobre el comportamiento estructural de las matrices de vecindades cerradas de esta clase de grafos, concluimos que un enfoque similar al que veníamos desarrollando no sería adaptable a esta otra variación de la dominación en grafos de intervalos propios. Cabe recordar que los grafos de intervalos propios están caracterizados por Roberts como aquellos para los cuales su matriz de vecindades cerradas (o más conocida como de adyacencias ampliadas) tiene la propiedad de los 1's consecutivos por columnas. De todos modos, como mencionamos en la sección Introducción, podemos notar que al menos se cuenta con un algoritmo (de Liao y Chang) existente para grafos fuertemente cordales, aplicable ya que éstos incluyen a los grafos de intervalos. Decidimos entonces trasladarnos al estudio de la  $k$ -upla dominación en una clase definida de manera similar, la de los co-biconvexos, definida a través de la propiedad de los 0's consecutivos por columnas de sus matrices de adyacencias ampliadas.

---

Para la clase de los grafos co-biconvexos entonces, mostramos cómo, resolviendo el problema para  $k = 2$  y  $k = 3$ , se puede resolver el problema para otros valores de  $k$ , en función de la cantidad de vértices universales que presenta el grafo co-biconvexo dado.

El siguiente objetivo planteado, como es habitual, fue pretender extender nuestro estudio a una superclase de los grafos co-biconvexos, objetivo que tenía como meta seguir completando el estudio del problema sobre todos los grafos arco-circulares, o de otra manera, encontrar una línea o barrera hasta donde poder seguir consiguiendo resultados de polinomialidad para los problemas de dominación que abordamos. Nos propusimos explorar entonces la clase de los grafos concave-round, que constituyen una superclase de los grafos co-biconvexos y también están caracterizados por una propiedad de sus matrices de adyacencias ampliadas (o de vecindades cerradas), la propiedad de los 1's circulares por columnas.

En la búsqueda de resultados generales respecto de la dominación en grafos concave-round, se decidió comenzar el estudio sobre una subclase de los mismos, la clase de los grafos web, para los cuales esa propiedad circular se satisface de una manera particular. En realidad y a nuestro entender, el problema de la  $k$ -upla dominación ha sido solo parcialmente estudiado en la clase de los grafos web en un único trabajo [1], en el cual solo se muestran cotas para el número mínimo de cualquier conjunto  $k$ -upla dominante y su valor exacto solo para  $k = 2$  y  $k = \delta(G)$ . En esta tesis se muestran resultados que conducen al diseño de un algoritmo que resuelve el problema para todo valor de  $k$  y todo grafo web.

Creemos que el estudio realizado se podrá adaptar y/o generalizar en un futuro para todos los grafos concave-round y para las demás variantes de dominación estudiadas en esta tesis.

En el desarrollo de esta tesis hacemos uso de técnicas y herramientas que proporcionan la teoría de grafos y de complejidad computacional de problemas de decisión. Detallamos a continuación un resumen de los contenidos específicos de cada capítulo.

En el Capítulo 1 introducimos conceptos necesarios para la comprensión de este trabajo, la notación básica general y los resultados conocidos que están relacionados con esta tesis.

En el Capítulo 2 consideramos los problemas de  $k$ -dominación total y  $k$ -dominación — también en sus versiones ponderadas— en la clase de los grafos de intervalos propios. En la Sección 2.2 se describe la reducción diseñada a partir del problema de  $k$ -dominación total en esta clase de grafos a un problema de búsqueda de un camino más corto en un grafo dirigido. Se detalla cómo se puede modificar el enfoque para resolver el problema de la  $k$ -dominación en la Sección 2.3. También se presentan las extensiones a los casos ponderados en la Sección 2.4.

En el Capítulo 3 mostramos el estudio realizado sobre el problema de  $k$ -upla dominación en la clase de los grafos co-biconvexos. En las Secciones 3.2 y 3.3 demostramos resultados generales para grafos con vértices universales que nos permiten resolver el problema para  $k = 2$  y  $k = 3$  en esta clase. Luego mostramos cómo utilizar esos resultados para resolver el

---

problema para otros valores del parámetro  $k$  que dependen del número de vértices universales del grafo. El análisis del tiempo de ejecución de los algoritmos se desarrollan en la Sección 3.4.

En el Capítulo 4 mostramos el estudio realizado sobre el mismo problema abordado en el Capítulo 3, el problema de  $k$ -upla dominación, en la clase de los grafos web. Se muestra un algoritmo eficiente que resuelve el problema de la  $k$ -upla dominación en cualquier grafo web para todo valor de  $k$ . El valor mínimo de un conjunto  $k$ -upla dominante ajusta estrictamente a las cotas superior e inferior que existían para este valor en la literatura.

Por último, en el Capítulo 5 presentamos algunas conclusiones de esta tesis y perspectivas de trabajo.



---

## Difusión de resultados

Los resultados presentados en esta tesis dieron origen a las siguientes publicaciones, presentaciones en reuniones científicas y trabajos en evaluación:

- ⊕ N. Chiarelli, T. R. Hartinger, V. A. Leoni, M. I. Lopez Pujato, M. Milanic, *Improved algorithms for  $k$ -domination and total  $k$ -domination in proper interval graphs*. Lecture Notes in Computer Science, **10856** (2018) 290–302.
- ⊕ N. Chiarelli, T. R. Hartinger, V. A. Leoni, M. I. Lopez Pujato, M. Milanic, *New algorithms for weighted  $k$ -domination and total  $k$ -domination problems in proper interval graphs*. Theoretical Computer Science, **795** (2019) 128–141.
- ⊕ M. P. Dobson, V. Leoni, M. I. Lopez Pujato, *Tuple domination on graphs with the consecutive-zeros property*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, **346** (2019) 401-411.
- M. P. Dobson, V. Leoni, M. I. Lopez Pujato, *Efficient algorithms for tuple domination on co-biconvex graphs and web graphs*, manuscrito en preparación para ser enviado a la Discrete Applied Mathematics, 2020.
- M. P. Dobson, M. I. Lopez Pujato, V. Leoni, *Tuple domination on web graphs*, expuesto en la Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina UMA, septiembre 2019, Mendoza, Argentina.
- M. P. Dobson, M. I. Lopez Pujato, V. Leoni, *Tuple domination on graphs with the consecutive-zeros property*, expuesto en Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium LAGOS, junio 2019, Belo Horizonte, Brasil.
- M. P. Dobson, M. I. Lopez Pujato, V. A. Leoni, *Uplas dominantes mínimas en una subclase de grafos arco-circulares*, presentado en la Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina UMA, septiembre 2018, La Plata, Argentina.
- N. Chiarelli, T. R. Hartinger, V. A. Leoni, M. I. Lopez Pujato, M. Milanic, *Improved algorithms for  $k$ -Domination and Total  $k$ -Domination in Proper Interval Graphs*, expuesto en International Symposium on Combinatorial optimization ISCO, abril 2018, Marrakesh, Marruecos.
- N. Chiarelli, T. R. Hartinger, V. A. Leoni, M. I. Lopez Pujato, M. Milanic,  *$k$ -dominación y  $k$ -dominación total en grafos de intervalos propios*, expuesto en el Primer Encuentro Conjunto de la Real Sociedad Matemática Española y la Unión Matemática Argentina, diciembre 2017, Buenos Aires, Argentina.



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>27</b>
1.1. Algunos conceptos de la teoría de grafos . . . . .	29
1.1.1. Conceptos básicos y notaciones generales . . . . .	29
1.1.2. Algunas clases de grafos . . . . .	30
1.1.3. Matrices asociadas a grafos y algunas caracterizaciones . . . . .	33
1.2. Problemas de decisión . . . . .	36
1.2.1. Algunas clases de complejidad . . . . .	36
1.2.2. Algunos conceptos relacionados con algoritmos . . . . .	38
1.3. Algunas variaciones del problema de dominación en grafos . . . . .	39
1.3.1. Problema de la $k$ -upla dominación . . . . .	39
1.3.2. Complejidad computacional del problema de la $k$ -upla dominación . . . . .	43
1.3.3. Problema de la $k$ -dominación total . . . . .	43
1.3.4. Complejidad computacional del problema de la $k$ -dominación total . . . . .	45
1.3.5. Problema de la $k$ -dominación . . . . .	46
1.3.6. Complejidad computacional del problema de la $k$ -dominación . . . . .	47
<b>2. <math>k</math>-dominación y <math>k</math>-dominación total en grafos de intervalos propios</b>	<b>49</b>
2.1. Análisis de algoritmos existentes . . . . .	51
2.2. Una reducción para la $k$ -dominación total . . . . .	54
2.3. Modificación del enfoque para $k$ -dominación . . . . .	68
2.4. Los problemas ponderados . . . . .	71
<b>3. <math>k</math>-upla dominación en grafos co-biconvexos</b>	<b>73</b>
3.1. Propiedades sobre 0's y 1's consecutivos en matrices 0,1 . . . . .	75
3.2. Conjuntos $k$ -upla dominantes en grafos con vértices universales . . . . .	78
3.3. Grafos co-biconvexos. Algunas propiedades . . . . .	79
3.4. Problema de la $k$ -upla dominación en grafos co-biconvexos . . . . .	84
3.4.1. Construcción de grafos de intervalos auxiliares $H_i$ . . . . .	85
3.4.2. Conjuntos estables de $H_i$ y conjuntos $k$ -uplas dominantes en $G$ . . . . .	86
3.4.3. Problema de la 2-upla dominación . . . . .	89
3.4.4. Problema de la 3-upla dominación . . . . .	89

<b>4. <math>k</math>-upla dominación en grafos web</b>	<b>93</b>
4.1. Notaciones generales y congruencia módulo $n$ . . . . .	95
4.2. Resultados técnicos: Partición del conjunto de vértices de un grafo web . . .	96
4.3. Conjuntos $k$ -upla dominantes en grafos web. Un algoritmo . . . . .	99
<b>5. Conclusiones finales y perspectivas</b>	<b>107</b>

# Índice de figuras

1.1. Grafo cordal. . . . .	31
1.2. Grafo propio de intervalos y un modelo de intervalos para él. . . . .	32
1.3. Grafo arco-circular y un modelo arco-circular para él. . . . .	32
1.4. Grafo $W_{15}^4$ . . . . .	33
1.5. Grafo biconvexo. . . . .	33
1.6. Matriz de adyacencia ampliada del grafo $G$ de la Figura 1.3. . . . .	34
1.7. Matriz de adyacencia ampliada del grafo web $W_{15}^4$ . . . . .	35
1.8. Conjuntos dominantes (o 1-upla dominantes) . . . . .	39
1.9. Conjuntos 2-uplas dominantes. . . . .	41
1.10. Conjunto 2-upla dominante mínimo. . . . .	41
1.11. Conjuntos dominantes totales . . . . .	44
1.12. Conjunto dominante . . . . .	46
1.13. Conjunto 2-dominante . . . . .	46
2.1. Modelo $\mathcal{I}'$ de intervalos propios de $G$ . . . . .	55
2.2. Nodo pequeño $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_q})$ . . . . .	56
2.3. Nodo grande $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{2k}})$ . . . . .	56
2.4. Propiedades de un arco $E_0$ . . . . .	57
2.5. Arco $E_1$ . . . . .	57
2.6. (a) Un modelo de intervalos propios $\mathcal{I}$ , (b) el correspondiente grafo de intervalos propios $G$ y (c) una parte del digrafo $D_2^t$ definido sobre $G$ , donde se muestran solo los nodos que se encuentran en algún camino dirigido de $I_0$ a $I_9$ . Los arcos en $E_1$ se muestran en negritas. . . . .	58
3.1. Matriz con la propiedad C0P por columnas. . . . .	75
3.2. Matriz con la propiedad C1P por columnas. . . . .	76
3.3. Un grafo arco-circular $G$ y un modelo arco-circular para él. . . . .	76
3.4. Matriz de adyacencia ampliada con la propiedad C0P por columnas para el grafo $G$ de la Figura 3.3. . . . .	77
3.5. Matriz que se obtiene a partir de $A^*(G)$ (Fig. 3.4) al realizar la permutación indicada en (3.2). . . . .	77

3.6.	$C_5$ no es un grafo co-biconvexo . . . . .	80
3.7.	Matriz de adyacencia ampliada del ciclo $C_5$ . . . . .	80
3.8.	Esquema de $A^*(G)$ para $G$ un grafo co-biconvexo con $C_3 = \emptyset$ . . . . .	82
3.9.	Matriz de adyacencia ampliada según el renombramiento de los vértices de $G$ como se muestra en la Fig. 3.10. . . . .	83
3.10.	Renombramiento de vértices para obtener la partición $(C_1, C_2, C_3)$ de $V(G)$ . . . . .	83
3.11.	Grafos $H_1$ y $H_2$ relacionados con el grafo $G$ de la Figura 3.10. . . . .	86
3.12.	Grafo $G - \mathcal{U}$ , donde $G$ es el grafo presentado en la Figura 3.10 y $\mathcal{U} = \{v_7\}$ . . . . .	91
3.13.	Grafo de intervalos $H$ . . . . .	92
4.1.	Grafo web $W_{15}^4$ y su matriz de adyacencia ampliada . . . . .	95
4.2.	Partición de $V(W_{15}^4)$ . . . . .	99
4.3.	$N[v_1]$ tiene $l_2 = 3$ vértices de $S_i$ , para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ , donde $v_1 \in W_{15}^4$ . . . . .	99

# Capítulo 1

## Preliminares

## **Resumen**

En este capítulo introducimos conceptos necesarios para la comprensión de este trabajo, resultados conocidos que se utilizan en su desarrollo y acordamos algunas notaciones. En la primera sección se muestran las definiciones relacionadas a la teoría de grafos y otras generales que se recuerdan para ser empleadas en los siguientes capítulos. En la segunda sección, se introducen conceptos relacionados a los problemas de optimización y/o decisión y a su complejidad computacional. En la última sección se presentan formalmente algunas variaciones del problema de dominación; aquellas que se abordan en esta tesis.

## 1.1. Algunos conceptos de la teoría de grafos

### 1.1.1. Conceptos básicos y notaciones generales

Toda definición y/o notación relativa a la teoría de grafos que no esté especificada en este trabajo se puede consultar en [77].

Un *grafo*  $G$  es una terna consistente de dos conjuntos finitos,  $V(G)$  (el conjunto de vértices) y  $E(G)$  (el conjunto de aristas), y una relación que asocia a cada arista de  $E(G)$  dos elementos de  $V(G)$ . Diremos que una arista es *incidente* en cada uno de los vértices a ella asociados. Además, si una arista es incidente en los vértices  $u$  y  $v$ , notaremos dicha arista con  $uv$  y diremos que  $u$  y  $v$  son vértices *adyacentes* en  $G$ .

Un *lazo* en  $G$  es una arista que tiene asociado dos elementos iguales de  $V(G)$ . Aristas *múltiples* son aquellas que asocian los mismos pares de vértices. Un grafo *simple* es uno sin lazos ni aristas múltiples.

Un grafo es *trivial* cuando no tiene aristas.

A partir de aquí y en todo el desarrollo de esta tesis se considerarán grafos simples.

Es usual representar a los grafos a través de gráficos consistentes de puntos y líneas, como los que se muestran en la mayoría de los ejemplos en este trabajo. Los puntos representan los vértices del grafo y las líneas, las aristas.

Cuando  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , diremos que  $G$  es un grafo de *orden*  $n$ .

El *grado* de un vértice  $v \in V(G)$  es el número de aristas incidentes en  $v$  y se denota por  $d(v)$ . El *grado mínimo* de  $G$  se denota por  $\delta(G)$  y es el menor entre todos los grados de vértices de  $G$ . El *grado máximo* de  $G$  se denota por  $\Delta(G)$  y es el mayor entre todos los grados de vértices de  $G$ .

Para  $v \in V(G)$ ,  $N[v] = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\} \cup \{v\}$  denota la *vecindad cerrada* del vértice  $v$  en  $G$  y  $N(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ , la *vecindad (abierto)* del vértice  $v$ . Cuando sea necesario especificar el grafo que se está considerando, se utilizará la notación  $N_G[v]$  o  $N_G(v)$ , si éste es  $G$  por ejemplo.

Un vértice  $v$  es *simple* si  $N[v] = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ , donde  $v = v_1$ , y tal que se satisface  $N[v_i] \subseteq N[v_j]$  para todo  $1 \leq i \leq j \leq r$ .

Un vértice  $v \in V(G)$  se llama *universal* si es adyacente a todo otro vértice del grafo.

$G'$  es un *subgrafo inducido* (por vértices) de  $G$  y se escribe  $G' \subseteq G$ , si  $E(G') = \{uv : uv \in E(G), \{u, v\} \subseteq V'\}$ , para algún  $V' \subseteq V(G)$ . Cuando sea necesario, se usará  $G[V']$  para denotar a  $G'$  y se dirá que  $G'$  es inducido por  $V'$ . Dado  $S \subseteq V(G)$ , el subgrafo inducido  $G[V(G) \setminus S]$  se denota por  $G - S$ . Para simplificar, escribimos  $G - v$  en lugar de  $G - \{v\}$ , para  $v \in V(G)$ .

Dado un grafo  $G$ , se denotará con *co- $G$*  al grafo complemento de  $G$ .

Una *clique* en  $G$  es un subconjunto de vértices mutuamente adyacentes en  $G$ . Una clique es *maximal* si no existe ninguna otra clique de  $G$  que la contenga propiamente. Una clique es *máxima* si no existe ninguna otra clique de mayor tamaño en  $G$ .

Un *conjunto estable* en  $G$  es un subconjunto de vértices mutuamente no adyacentes. El cardinal de un conjunto estable de máximo tamaño en  $G$  se denota por  $\alpha(G)$  y se llama *número de estabilidad* (o *independencia*) de  $G$ .

Un *grafo dirigido* o *digrafo*, denotado por  $D = (V(D), E(D))$ , es una terna consistente de dos conjuntos finitos,  $V(D)$  llamado conjunto de *nodos*, y  $E(D)$  conjunto de *arcos* del digrafo, y un función que asigna a cada arco un par ordenado de nodos. Los arcos de  $E(D)$  serán denotados por  $(u, v)$ , con  $u \in V(D)$ ,  $v \in V(D)$  y  $u \neq v$ .

Un *lazo* en un digrafo  $D$  es un arco de  $E(D)$  de la forma  $(u, u)$ . Arcos *múltiples* son aquellos que asocian los mismos pares ordenados de nodos. Un digrafo es *simple* si no tiene lazos ni arcos múltiples.

Un *camino dirigido* en un digrafo  $D$  es un digrafo simple cuyos vértices pueden ser ordenados linealmente tal que existe un arco  $(u, v)$  si y solo si  $v$  es el que le sigue a  $u$  en ese ordenamiento. De manera similar se define *ciclo dirigido* en un digrafo  $D$ .

Un *digrafo acíclico* es uno sin ciclos dirigidos.

Una *función longitud* en un digrafo  $D$ , que denotamos con  $l$ , es una función que asigna a cada arco  $(u, v)$  de  $E(D)$  un entero no negativo. Este entero no negativo asignado al arco  $(u, v)$  lo denominamos *longitud del arco*  $(u, v)$ .

Un *digrafo ponderado* es un digrafo junto con una función longitud.

Dado un digrafo ponderado  $D$  y un camino dirigido en él, la *longitud del camino dirigido* se define como la suma de las longitudes de sus arcos.

### 1.1.2. Algunas clases de grafos

Se presentan a continuación las clases de grafos que se mencionan como así también aquellas clases sobre las cuales se desarrolló el estudio en este trabajo.

Un *camino* es un grafo tal que sus vértices pueden ser ordenados de tal manera que dos de ellos son adyacentes si y solo si son consecutivos en la lista. La *longitud de un camino* es el número de aristas que hay en el camino. Denotaremos con  $P_n$  al camino donde  $n = |V(P_n)|$ .

Un grafo  $G$  es *conexo* si existe un camino entre cualesquiera dos vértices distintos de  $G$ .

Dado un grafo  $G$  y dos vértices  $u, v \in V(G)$ , la *distancia entre  $u$  y  $v$*  denotada por  $d(u, v)$  es la longitud del camino más corto en  $G$  de  $u$  a  $v$ , si tal camino existe. Si  $G$  no contiene un camino de  $u$  a  $v$ , entonces  $d(u, v) = \infty$ .

Un *ciclo*, que se denota con  $C_n$ , es un grafo donde  $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \{v_n v_1\}$ , para  $n \geq 3$ . Decimos que  $v_i$  y  $v_{i+1}$ , y  $v_1$  y  $v_n$  son vértices consecutivos en el ciclo. Decimos que un ciclo es *par* (*impar*) si tiene una cantidad par (impar) de vértices, observemos que en un ciclo se verifica que  $|V(C_n)| = |E(C_n)|$ . Se llama *cuerda* de un ciclo a una arista que une a dos vértices no consecutivos del ciclo. Una cuerda  $uv$  de un ciclo par  $C$  es *impar*, cuando la distancia en  $C$  entre  $u$  y  $v$  es impar.

Un grafo *completo* de  $n$  vértices, que se denota con  $K_n$ , es uno para el cual  $V(K_n)$  induce una clique.

Un grafo es *cordal* si no posee ciclos inducidos de cuatro o más vértices.

Un grafo  $G$  es *fuertemente cordal* si es cordal y, dado cualquier ciclo en  $G$  de longitud par mayor o igual que seis, existe una cuerda entre vértices a distancia impar en el ciclo. Otras formas equivalentes de definirlos son las siguientes:

- todo subgrafo inducido de  $G$  tiene un vértice simple;
- admite un *orden de eliminación fuerte* es decir un orden  $[v_1, v_2, \dots, v_n]$  de  $V(G)$  tal que si  $i \leq j \leq k$  y  $v_j, v_k \in N_i[v_i]$ , luego  $N_i[v_j] \subseteq N_i[v_k]$ , donde  $N_i[v_j] = \{v_p \in N[v_j] : p \geq i\}$ .

La Figura 1.1 presenta un ejemplo de un grafo cordal que no es fuertemente cordal.

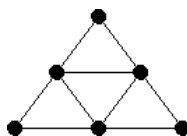


Figura 1.1: Grafo cordal.

Un grafo  $G$  es un grafo *bipartito* si existe una bipartición del conjunto de sus vértices de manera tal que toda arista tiene un extremo en cada conjunto de la partición. Es decir, existen  $V_1, V_2 \subseteq V(G)$  tales que  $V(G) = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y cada arista de  $G$  es de la forma  $vw$ , con  $v \in V_1$  y  $w \in V_2$ . Si cada vértice de  $V_1$  es adyacente a todos los vértices de  $V_2$ , se dice que  $G$  es *bipartito completo*.

Dada una familia de conjuntos  $\{R_i : i = 1, \dots, n\}$ , su *grafo de intersección* es el grafo  $G$  tal que  $V(G) = \{R_i : i = 1, \dots, n\}$  y  $E(G) = \{R_i R_j : R_i \cap R_j \neq \emptyset\}$ . A la familia  $\{R_i : i = 1, \dots, n\}$  se la llama *modelo de intersección* para el grafo  $G$ .

Un grafo  $G$  es un *grafo de intervalos* si tiene un modelo de intersección que consiste en intervalos cerrados en la línea real, es decir, si existe una familia  $\mathcal{I}$  de intervalos cerrados en la línea real y una correspondencia unívoca entre los vértices de  $G$  y los intervalos de  $\mathcal{I}$ , de manera que dos vértices son adyacentes en  $G$  si y solo si los intervalos correspondientes tienen intersección no vacía. La familia  $\mathcal{I}$  de intervalos se denomina *modelo de intervalos del grafo* del grafo.

Un *grafo de intervalos propios* es un grafo de intervalos que tiene un *modelo de intervalos propios*, es decir, un modelo de intersección en el que ningún intervalo contiene a otro [71]. La Figura 1.2 muestra un modelo para el grafo de intervalos propios representado. Se conocen varios algoritmos de reconocimiento en tiempo lineal de los grafos de intervalos propios (ver por ejemplo [25] y las referencias citadas allí).



Figura 1.2: Grafo propio de intervalos y un modelo de intervalos para él.

Un grafo  $G$  es *arco-circular* si tiene un modelo de intersección que consiste en arcos en un círculo, es decir, si hay una correspondencia uno a uno entre los vértices de  $G$  y una familia de arcos en un círculo de modo que dos vértices distintos son adyacentes en  $G$  cuando los arcos correspondientes tienen intersección no vacía. Un tal conjunto de arcos se llama *modelo arco-circular* de  $G$ . La Figura 1.3 muestra un modelo para el grafo arco-circular representado.

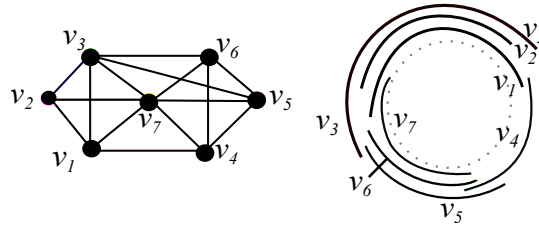


Figura 1.3: Grafo arco-circular y un modelo arco-circular para él.

Una familia  $\mathcal{R}$  de conjuntos tiene la *propiedad Helly* si para cada subfamilia  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{R}$  se cumple lo siguiente: si los elementos de  $\mathcal{T}$  tienen intersección no vacía dos a dos, entonces la intersección de todos los elementos de  $\mathcal{T}$  es no vacía.

Un grafo  $G$  es *arco-circular Helly* si es un grafo arco-circular con un modelo arco-circular que satisface la propiedad Helly.

Un grafo *web*, denotado por  $W_n^m$  con  $m \geq 1$  y  $n \geq 2m + 1$ , es un grafo para el cual el conjunto de sus vértices es  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y tal que  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes si y sólo si  $j \equiv i \pm l \pmod{n}$ ,  $l \in \{1, \dots, m\}$  [74]. En la Figura 1.4 se muestra el grafo web  $W_{15}^4$ .

Un grafo  $G$  es *concave-round* si sus vértices  $v_1, \dots, v_n$  pueden enumerarse de tal manera que para cada vértice  $v_i$ , existen enteros no negativos  $l$  y  $r$  (dependientes de  $i$ ) tal que  $N[v_i] = \{v_{i-l}, v_{i-l+1}, \dots, v_{i+r}\}$ , donde los subíndices se calculan módulo  $n$ .

Un grafo bipartito  $G$  donde  $V(G) = V_1 \cup V_2$  es *convexo sobre  $V_1$*  si los vértices pertenecientes a  $V_1$  se pueden ordenar de tal manera que para todo  $v \in V_2$ , los vértices adyacentes a  $v$  son consecutivos en ese ordenamiento, o de manera similar,  $N(v)$  es un intervalo natural. Un grafo bipartito  $G$  donde  $V(G) = V_1 \cup V_2$  es *biconvexo* o *doblemente convexo* si existe un ordenamiento lineal de sus vértices tal que la vecindad abierta de cada vértice,  $N(v)$ , es un intervalo en el ordenamiento.

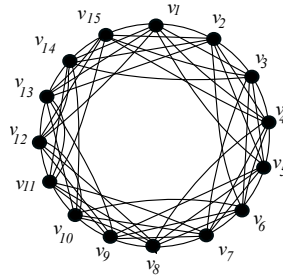


Figura 1.4: Grafo  $W_{15}^4$ .

Un grafo es *co-biconvexo* si es el grafo complemento de uno biconvexo. El grafo de la Figura 1.3 es co-biconvexo. En efecto, su complemento exhibido en la Figura 1.5 es biconvexo ya que sus vértices fueron indexados de modo que la vecindad abierta de cada vértice es un intervalo natural.

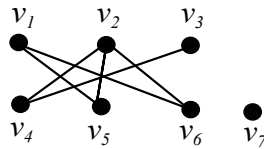


Figura 1.5: Grafo biconvexo.

Efectivamente, notar que:

$$\begin{aligned}
 N(v_1) &= \{v_5, v_6\} \leftrightarrow [5, 6]_{\mathbb{Z}^+}, & N(v_2) &= \{v_4, v_5, v_6\} \leftrightarrow [4, 6]_{\mathbb{Z}^+}, \\
 N(v_3) &= \{v_4\} \leftrightarrow [4, 4]_{\mathbb{Z}^+}, & N(v_4) &= \{v_2, v_3\} \leftrightarrow [2, 3]_{\mathbb{Z}^+}, \\
 N(v_5) &= \{v_1, v_2\} \leftrightarrow [1, 2]_{\mathbb{Z}^+}, & N(v_6) &= \{v_1, v_2\} \leftrightarrow [1, 2]_{\mathbb{Z}^+}, \\
 N(v_7) &= \emptyset.
 \end{aligned}$$

Un grafo es co-biconvexo si es concave-round y es el complemento de un grafo bipartito [72, 76].

**Observación 1.** *La clase de grafos web como así también la clase de grafos concave-round son subclases de los grafos arco-circulares [75].*

### 1.1.3. Matrices asociadas a grafos y algunas caracterizaciones

Una matriz cuyas entradas son ceros o unos se llamará matriz 0, 1.

La matriz cuadrada cuyas entradas son unos se denotará con  $J$  y la matriz identidad con  $I$ , ambas de tamaños apropiados.

Dado un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , la *matriz de adyacencia* asociada a  $G$ ,  $A(G)$ , es una matriz cuadrada de orden  $|V(G)|$ , para la cual la entrada  $a_{ij}$  es 1 si los vértices  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes en  $G$  y es 0 en caso contrario. La *matriz de adyacencia ampliada* o *matriz de vecindad cerrada*,  $A^*(G)$ , es la matriz cuadrada de orden  $|V(G)|$  que se define como  $A^*(G) := A(G) + I$ ; es decir, las entradas fuera de la diagonal principal de  $A^*(G)$  son las de  $A(G)$ , y las de la diagonal principal son iguales a 1 (ver Figura 1.6 que corresponde al grafo  $G$  de Figura 1.3).

$$A^*(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1.6: Matriz de adyacencia ampliada del grafo  $G$  de la Figura 1.3.

A continuación enunciamos algunas propiedades de matrices 0, 1:

- Una matriz 0, 1 tiene la *propiedad de 0's consecutivos* (C0P) por columnas si es posible permutar sus filas de manera tal que la matriz resultante tiene sus ceros entradas ubicadas de manera consecutiva en cada columna.

La matriz presentada en la Figura 1.6 es un ejemplo de una matriz que verifica la propiedad C0P por columnas, donde los ceros aparecen consecutivamente en cada columna sin necesidad de permutar filas.

- Una matriz 0, 1 tiene la *propiedad de 1's consecutivos* (C1P) por columnas si hay una permutación de sus filas que ubica a los unos de manera consecutiva en cada columna.
- Una matriz 0, 1 tiene la *propiedad de 1's circulares* (Circ1P) por columnas si existe una permutación de sus filas que ubica a los unos de manera circular en cada columna. Informalmente, se puede pensar que si la matriz envuelve un cilindro, los unos quedan ubicados consecutivamente.

Observar que la matriz exhibida en la Figura 1.6 verifica esta propiedad.

A continuación, en la Figura 1.7, se presenta otro ejemplo de una matriz con la propiedad Circ1P por columnas. Notar que esta matriz es la de adyacencia ampliada del grafo web  $W_{15}^4$  presentado en la Figura 1.4.

$$A^*(W_{15}^4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1.7: Matriz de adyacencia ampliada del grafo web  $W_{15}^4$ .

Las clases de grafos que serán objeto de estudio en esta tesis son tales que sus matrices de adyacencia ampliada verifican algunas de la propiedades enunciadas anteriormente. En efecto:

- Los grafos de intervalos propios fueron caracterizados por Roberts [71] como aquellos grafos cuyas matrices de adyacencia ampliada tienen la propiedad C1P por columnas.
- Debido a Tucker [75] y Safe [72], los grafos co-biconvexos están caracterizados como aquellos grafos cuyas matrices de adyacencia ampliada tienen la propiedad C0P por columnas.
- Claramente un grafo es concave-round si y sólo si su matriz de adyacencia ampliada tiene la propiedad Circ1P por columnas.
- A partir de su definición, es claro que la matriz de adyacencia ampliada de un grafo web  $W_n^m$  tiene la propiedad Circ1P por columnas. Notar que en cada columna (fila) de  $A^*(W_n^m)$  «circula» la misma cantidad de unos.

## 1.2. Problemas de decisión

### 1.2.1. Algunas clases de complejidad

En esta sección presentamos los conceptos básicos de la teoría de complejidad computacional de problemas de decisión que se mencionan en este trabajo. Una introducción completa a esta teoría está más allá del alcance de esta tesis; más información sobre esto puede verse en [36].

Un *problema de decisión* está formado por parámetros de entrada (que determinan la instancia del problema) y por una pregunta, la cual tiene dos respuestas posibles “sí” ó “no”, según los valores de los parámetros de la entrada.

A modo de ejemplos, pero remarcando que cada uno de ellos será protagonista en el desarrollo de esta tesis, presentamos los siguientes problemas, formulados como problemas de decisión.

**Ejemplo 2.** *Dado un grafo  $G$ ,  $D \subseteq V(G)$  es un conjunto dominante en  $G$  si*

$$|N[v] \cap D| \geq 1, \forall v \in V(G),$$

*es decir, si al menos un elemento del conjunto  $D$  pertenece a la vecindad cerrada de cada vértice.*

*El problema de dominación consiste en hallar un conjunto dominante de menor tamaño, entre todos los conjuntos dominantes del grafo dado. Éste se puede formular como el siguiente problema de decisión:*

**Instancia:** *Un grafo  $G$ ,  $\beta \in \mathbb{Z}^+$ .*

**Pregunta:** *¿Tiene  $G$  un conjunto dominante de tamaño a lo sumo  $\beta$ ?*

**Ejemplo 3** (El Problema del Camino más Corto entre dos vértices en un digrafo). *Dado un digrafo ponderado  $D$  y dos nodos  $u, v \in V(D)$ , el problema del camino más corto entre  $u$  y  $v$  en  $D$  consiste en encontrar un camino dirigido simple de  $u$  a  $v$  de tal manera que la longitud del camino dirigido (suma de las longitudes de sus arcos) sea mínima. Como problema de decisión, puede formularse de la siguiente manera:*

**Instancia:** *Un digrafo  $D$ ,  $a, b \in V(D)$ ,  $l(u, v) \in \mathbb{Z}^+$  para cada  $(u, v) \in E(D)$ ,  $\beta \in \mathbb{Z}^+$ .*

**Pregunta:** *¿Tiene  $D$  un camino dirigido simple de  $a$  a  $b$  de longitud a lo sumo  $\beta$ ?*

*El Problema del Camino más Corto entre dos vértices en un digrafo puede calcularse en un tiempo de ejecución polinomial usando cualquiera de los enfoques estándares para resolverlo como, por ejemplo, el algoritmo de Dijkstra. En un digrafo dirigido acíclico, usando ordenación topológica, el algoritmo puede resolver el problema del camino más corto en tiempo de ejecución  $n^2$ , donde  $n = |V(D)|$  [28] (ver también [73]).*

Una *reducción* de un problema de decisión  $\pi_1$  a otro  $\pi_2$  es un procedimiento que convierte instancias de  $\pi_1$  en instancias de  $\pi_2$ , de manera tal que la respuesta a la pregunta en  $\pi_1$  en la instancia original está determinada por la respuesta a la pregunta en  $\pi_2$  en la instancia obtenida a través de la transformación en cuestión. En este caso, decimos que  $\pi_1$  *se reduce* a  $\pi_2$ . Esta transformación proporciona los medios para convertir cualquier algoritmo que resuelve el problema  $\pi_2$  en un algoritmo que resuelve  $\pi_1$  (ver Sección 1.2.2). Por lo tanto si  $\pi_1$  se reduce a  $\pi_2$  en tiempo polinomial, entonces el algoritmo en tiempo polinomial para resolver  $\pi_2$  implica que existe un algoritmo de tiempo polinomial para resolver  $\pi_1$ .

Los problemas de decisión se clasifican en conjuntos de complejidad comparable llamados *clases de complejidad*. Algunas de esas clases se presentan a continuación.

Se dice que un problema está en la clase  $P$  (*Polynomial-time*) si puede resolverse mediante un algoritmo determinístico en tiempo polinomial esto es, un algoritmo en el que el paso  $i + 1$  está determinado únicamente por el paso  $i$  y además, el número de pasos que deben ser ejecutados está acotado por un polinomio en el tamaño de la entrada del algoritmo.

Los problemas de complejidad polinomial son «tratables», es decir, en la práctica se pueden resolver en un tiempo «razonable».

El problema presentado arriba (Ejemplo 3) está en la clase  $P$ .

La clase  $NP$  (*Non-Deterministic Polynomial-time*) contiene a la clase de problemas que pueden resolverse en tiempo polinomial por un algoritmo no determinístico.

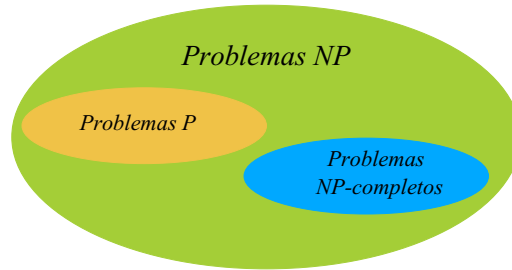
Decidir si las clases  $P$  y  $NP$  son iguales es el problema abierto más importante en la teoría de complejidad computacional. En realidad, existe una fuerte tendencia a creer que  $P \neq NP$ .

Un problema  $\pi$  es *NP-completo* si  $\pi \in NP$  y todos los problemas de la clase  $NP$  se pueden reducir en tiempo polinomial a  $\pi$ . Se puede decir que los problemas  $NP$ -completos son los problemas más difíciles de  $NP$ . Las bases de la teoría de  $NP$ -completitud fueron sentadas en [24].

Stephen Cook enfatizó la importancia de las reducciones en tiempo polinomial, dando la primera prueba de que el *problema de satisfacibilidad* (SAT) tiene la propiedad de que todo otro problema de la clase  $NP$  puede reducirse polinomialmente a él. Considerando el resultado de Cook, para probar que un problema  $\pi$  es  $NP$ -completo no es necesario reducir todo problema de  $NP$  en  $\pi$ . En su lugar se usa el siguiente resultado:

**Proposición 4** (Garey [36]). *Sean  $\pi_1$  y  $\pi_2$  problemas de decisión. Si  $\pi_1$  puede reducirse polinomialmente a  $\pi_2$  y  $\pi_2 \in NP$ , entonces si  $\pi_1$  es  $NP$ -completo resulta que  $\pi_2$  es  $NP$ -completo.*

En otras palabras, un problema de decisión  $NP$ -completo no puede ser resuelto en tiempo polinomial, a menos que  $P = NP$ .



### 1.2.2. Algunos conceptos relacionados con algoritmos

En el estudio de los problemas de decisión, se suele seguir diferentes líneas de trabajo. Una de ellas es, dado un problema de decisión  $\pi_1$ , tratar de hallar una reducción polinomial a otro problema  $\pi_2$  y de esta manera,

- si  $\pi_1$  es un problema que pertenece a la clase  $NP$ -completo, poder concluir que  $\pi_2$  también es un problema  $NP$ -completo;
- si existe un algoritmo polinomial que resuelve  $\pi_2$ , obtener un algoritmo polinomial que resuelva  $\pi_1$  como combinación de la reducción y el algoritmo que resuelve  $\pi_2$ .

Otra línea de trabajo consiste en hallar algoritmos polinomiales específicos para  $\pi_1$  que permitan resolverlo en alguna clase de grafos.

La polinomialidad o no de un algoritmo se mide respecto a su función de complejidad, la cual se explica a continuación.

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones, decimos que  $f \in O(g)$  si existen  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  tales que  $f(n) \leq \alpha g(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .

La *función de complejidad* de un algoritmo es una función  $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  tal que  $f(n)$  es la cantidad de operaciones que realiza el algoritmo en el peor caso cuando toma una entrada de tamaño  $n$ . Utilizamos la notación  $O$  “mayúscula” para especificar la función y se suele denominar *orden* (o *tiempo de ejecución*) del algoritmo.

Cuando se diseña un algoritmo para resolver un problema de decisión es importante probar la «correctitud» de dicho algoritmo.

Un *algoritmo es correcto* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. resuelve el problema para el cual fue diseñado,

2. para cada entrada, produce la salida deseada,
3. termina en un tiempo de ejecución finito.

## 1.3. Algunas variaciones del problema de dominación en grafos

### 1.3.1. Problema de la $k$ -upla dominación

Recordemos nuevamente el primer concepto de dominación surgido en la Teoría de Grafos, el concepto de conjunto dominante, introducido por Claude Berge en 1958. Dado un grafo  $G$ ,  $D \subseteq V(G)$  es un *conjunto dominante* (o 1-upla dominante para este trabajo, así no hay confusión con los conceptos que luego se definirán) en  $G$  si

$$|N[v] \cap D| \geq 1, \forall v \in V(G).$$

Informalmente, el concepto de conjunto dominante requiere que *al menos* un elemento del conjunto  $D$  pertenezca a la vecindad cerrada de cada vértice.

**Ejemplo 5.** En la Figura 1.8 se muestran dos conjuntos dominantes,  $D_1$  y  $D_2$ , de diferentes tamaños en un mismo grafo:  $D_1 = \{v_1, v_4, v_6, v_8\}$  y  $D_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ .

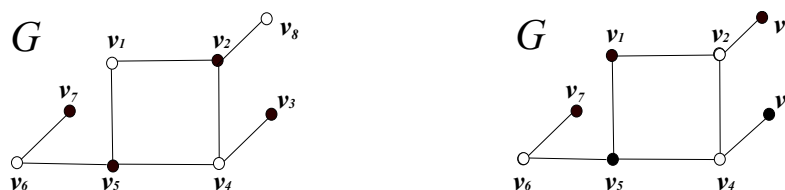


Figura 1.8: Conjuntos dominantes (o 1-upla dominantes)

Claramente  $D = V(G)$  es un conjunto dominante en  $G$ . De todos los conjuntos dominantes en  $G$ , interesa estudiar aquellos constituidos por el menor número de vértices de  $G$ . En este sentido, el *número de 1-upla dominación*,  $\gamma(G)$ , es el cardinal de un conjunto dominante en  $G$  de menor tamaño, es decir:

$$\gamma(G) = \min \{|D| : D \text{ es un conjunto dominante en } G\}.$$

Es claro que  $\gamma(G) = 1$  si y solamente si  $G$  tiene un vértice universal.

El *problema de la 1-upla dominación* en un grafo  $G$  dado, consiste en hallar un conjunto dominante en  $G$  de mínimo tamaño.

**Ejemplo 6.** Para el grafo del Ejemplo 5 resulta que:

$$\gamma(G) \leq 3,$$

pues hemos exhibido un conjunto dominante de tamaño 3. Por otro lado, debido a que  $N[v_3]$ ,  $N[v_7]$  y  $N[v_8]$  son disjuntas dos a dos y que deben tener cada una por lo menos un elemento del conjunto  $D$ , es sencillo verificar que cualquier conjunto dominante tiene al menos 3 vértices, de donde obtenemos que  $\gamma(G) = 3$ .

Observemos que el conjunto  $D_2$  de la figura del Ejemplo 5 es un conjunto dominante mínimo para dicho grafo.

Una generalización —introducida por F. Harary y T. W. Haynes en [42] (ver también [44])— del concepto de conjunto dominante en un grafo se obtiene al requerir que dentro de la vecindad cerrada de cada vértice del grafo se ubiquen *al menos*  $k$  elementos del subconjunto de vértices  $D$ , donde  $k$  es un número entero positivo fijo. En este caso,  $D$  será llamado un conjunto  $k$ -upla dominante en el grafo. Claramente,  $k \leq \delta(G) + 1$ , si no, no existe un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  (ver Observación 9). De todas los conjuntos  $k$ -uplas dominantes en  $G$ , interesa estudiar aquellos constituidos por el menor número de vértices. Formalmente,

**Definición 7.** ([42]) Dado  $G$  y  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $D \subseteq V(G)$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  si

$$|N[v] \cap D| \geq k, \forall v \in V(G).$$

El número de  $k$ -upla dominación,  $\gamma_{\times k}(G)$ , es el cardinal de un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  de menor tamaño, es decir:

$$\gamma_{\times k}(G) = \min \{|D| : D \text{ es un conjunto } k\text{-upla dominante en } G\}.$$

Observar que  $\gamma_{\times 1}(G) = \gamma(G)$ . Se define  $\gamma_{\times k}(G) = +\infty$ , en el caso en que no haya un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$ . Además, se define  $\gamma_{\times 0}(G) = 0$  para todo grafo  $G$ . Cuando  $G$  no es conexo, el número de  $k$ -upla dominación de  $G$  se define como la suma de los números de  $k$ -upla dominación de sus componentes conexas.

Es claro a partir de la definición introducida, que si  $G$  tiene un conjunto  $k$ -upla dominante  $D$ , entonces  $|D| \geq k$  y luego  $k \leq \gamma_{\times k}(G)$ . Además,  $\gamma_{\times k}(G) \leq n$ .

**Ejemplo 8.** A continuación se muestran dos conjuntos 2-uplas dominantes de diferentes tamaños en un mismo grafo. Los vértices que pertenecen a estos conjuntos son aquellos que en la figura aparecen en blanco.

Claramente,  $\gamma_{\times 2}(G) \leq 3$  pues en la Figura 1.9 se presenta un conjunto 2-upla dominante de tamaño 3. La Figura 1.10 muestra un conjunto 2-upla dominante del mismo grafo de tamaño dos, luego es mínimo ya que  $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2$ .

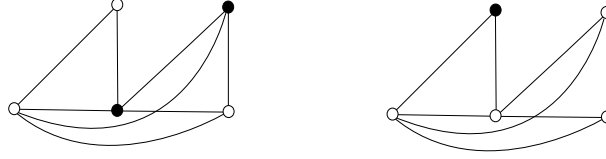


Figura 1.9: Conjuntos 2-uplas dominantes.

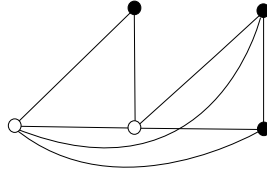


Figura 1.10: Conjunto 2-upla dominante mínimo.

Para un entero positivo  $k$  fijo, el *problema de la  $k$ -upla dominación* en un grafo dado  $G$ , consiste en hallar un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  de tamaño  $\gamma_{\times k}(G)$ . Este problema se puede formular como uno de decisión de la siguiente manera:

**Problema de la  $k$ -upla dominación para  $k$  fijo ( $PkUD$ ):**

INSTANCIA:  $G$  un grafo,  $\beta \in \mathbb{Z}^+$ .

PREGUNTA: ¿Tiene  $G$  un conjunto  $k$ -upla dominante de tamaño  $\beta$  o menor?

**Observación 9.** Un grafo  $G$  tiene un conjunto  $k$ -upla dominante si y sólo si  $k \leq \delta(G) + 1$ . En efecto: supongamos que  $k > \delta(G) + 1$ . Sea  $v_{i_0} \in V(G)$  tal que  $d(v_{i_0}) = \delta(G)$ , es decir  $|N[v_{i_0}]| = \delta(G) + 1$ .

Si  $D \subseteq V(G)$  es cualquier subconjunto, resulta entonces

$$|N[v_{i_0}] \cap D| \leq |N[v_{i_0}]| = \delta(G) + 1 < k,$$

por lo cual  $D$  no puede ser un conjunto  $k$ -upla dominante.

Recíprocamente si  $k \leq \delta(G) + 1$ , el conjunto  $D = V(G)$  satisface para cada  $v \in V(G)$ :

$$|N[v] \cap D| = |N[v] \cap V(G)| = |N[v]| \geq \delta(G) + 1 \geq k.$$

A partir de la Observación 9, podemos reducir el estudio del problema de la  $k$ -upla dominación a aquellas instancias dadas por grafos que satisfacen que su grado mínimo es mayor o igual a  $k - 1$ . La respuesta para el resto de las instancias es claramente un “no”.

Por esta razón, en todo este trabajo vamos a considerar que para el valor de  $k$  prefijado, las instancias que se consideran satisfacen este requerimiento.

**Observación 10.** *Observamos a continuación que hallar  $\gamma_{\times k}(G)$  es equivalente a resolver  $PkUD$ :*

*Sean  $G$  y  $\beta \in \mathbb{Z}^+$  definiendo una instancia de  $PkUD$ . Si la respuesta a la pregunta es:*

- “NO”, entonces todo conjunto  $k$ -upla dominante  $D$  en  $G$  verifica  $|D| > \beta$  y por lo tanto

$$\gamma_{\times k}(G) > \beta.$$

*Volvemos a resolver  $PkUD$   $i$  veces más para algún  $i \in \mathbb{Z}^+$  hasta que, sobre la instancia dada por el mismo  $G$  y  $\beta + i$ , la respuesta a la pregunta sea “SI”, resultando así que  $\gamma_{\times k}(G) = \beta + i$ .*

- “SI”, entonces existe un conjunto  $k$ -upla dominante  $D$  en  $G$  tal que  $|D| \leq \beta$ . Luego:

$$\gamma_{\times k}(G) \leq |D| \leq \beta. \tag{1.1}$$

*Como nos interesa encontrar un conjunto  $k$ -upla dominante de menor tamaño, volvemos a resolver  $PkUD$  ahora sobre la instancia dada por el mismo  $G$  y  $\beta - 1$ . Entonces:*

- Si la respuesta a la pregunta es “NO”, entonces para toda  $k$ -upla dominante  $D$  en  $G$  se verifica  $|D| > \beta - 1$  y luego

$$\gamma_{\times k}(G) > \beta - 1. \tag{1.2}$$

*De (1.1) y (1.2) se obtiene que  $\gamma_{\times k}(G) = \beta$ .*

- Si la respuesta es “SI”, entonces volvemos a resolver  $PkUD$  hasta llegar a la situación en que la respuesta de la  $i$ -ésima resolución de  $PkUD$  sea “SI” y en la  $i + 1$ -ésima resolución sea “NO”, logrando determinar así el valor de  $\gamma_{\times k}(G)$ .

*Recíprocamente, si  $\gamma_{\times k}(G) = \beta$  entonces tomando por instancia la dada por  $G$  y  $\beta \in \mathbb{Z}^+$ , la respuesta a la pregunta de  $PkUD$  será “SI”. Ahora bien, todo conjunto  $k$ -upla dominante  $D$  en  $G$  satisface  $|D| \geq \gamma_{\times k}(G) = \beta > \beta - 1$ . Así, al resolver  $PkUD$  sobre la instancia dada por  $G$  y  $\beta - 1$ , la respuesta a la pregunta será “NO”.*

### 1.3.2. Complejidad computacional del problema de la $k$ -upla dominación

Con respecto a los resultados de la complejidad computacional, el problema de la  $k$ -upla dominación (para cada  $k$  fijo) es NP-completo incluso para grafos cordales [58]. Se conocen algoritmos eficientes para cada  $k$  sólo para grafos fuertemente cordales [58] y para grafos  $P_4$ -tidy [29]. Más tarde, se demostró la polinomialidad de este problema en cualquier clase de grafos con parámetro clique-width acotado [3].

Para los grafos arco-circulares, algoritmos eficientes fueron presentados en [14] y [47] para el problema correspondiente a  $k = 1$ . Cabe remarcar que el parámetro clique-width para los grafos arco-circulares (y para todas las subclases de éstos que estudiamos en esta tesis) no es acotado [39], por lo que podemos decir que la complejidad de este problema en grafos arco-circulares permanece abierta para  $k > 1$ .

Por otra parte, para cada valor de  $k$ , se puede resolver en tiempo lineal en la subclase de los grafos de intervalos propios aplicando el algoritmo correspondiente para grafos fuertemente cordales, si se da además como parte de la entrada un orden de eliminación fuerte del grafo [58].

Es importante remarcar que entre las instancias polinomiales conocidas de este problema para el caso  $k = 2$ , los grafos de intervalos propios constituyen la subclase maximal de grafos cordales que conocemos.

### 1.3.3. Problema de la $k$ -dominación total

Dado un grafo  $G$ , un subconjunto  $U$  de vértices es un *conjunto dominante total* en  $G$  si cada vértice de  $G$  es adyacente a al menos un elemento de  $U$  distinto de él. Formalmente,

**Definición 11.** Dado  $G$ ,  $U \subseteq V(G)$  es un conjunto dominante total en  $G$  si

$$|N(v) \cap U| \geq 1, \forall v \in V(G).$$

Informalmente, la noción de conjunto dominante total requiere que *al menos* un elemento del conjunto  $U$  pertenezca a la vecindad abierta de cada vértice.

**Ejemplo 12.** Presentamos en el ejemplo de la Figura 1.11 dos conjuntos dominantes totales de diferentes tamaños en un mismo grafo,  $U_1 = \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_8\}$  y  $U_2 = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ .

De todos los conjuntos dominantes totales en  $G$ , interesa estudiar aquellos constituidos por el menor número de vértices de  $G$ . En este sentido, el *número de 1-dominación total*,  $\gamma^t(G)$ , es el cardinal de un conjunto dominante total en  $G$  de menor tamaño, es decir:

$$\gamma^t(G) = \text{mín} \{|U| : U \text{ es un conjunto dominante total en } G\}.$$

El *problema de 1-dominación total* consiste en hallar un conjunto dominante total en  $G$  de tamaño  $\gamma^t(G)$ .



Figura 1.11: Conjuntos dominantes totales

**Ejemplo 13.** Para el grafo de la Figura 1.11 resulta que:

$$\gamma^t(G) \leq 4, \quad (1.3)$$

pues hemos exhibido un conjunto dominante total de tamaño 4. Como  $N(v_3) = \{v_4\}$ ,  $N(v_7) = \{v_6\}$  y  $N(v_8) = \{v_2\}$ , resulta que si  $U$  es un conjunto dominante total entonces  $\{v_2, v_4, v_6\} \subseteq U$ . Además como  $N(v_6) = \{v_5, v_7\}$ , alguno de los dos vértices adyacentes a  $v_6$  debe pertenecer a  $U$ , por lo que  $|U| \geq 4$ , de donde obtenemos que  $\gamma^t(G) = 4$ . De esto resulta que el conjunto  $U_2$  de la Figura 1.11 es un conjunto dominante total de mínimo tamaño para dicho grafo.

**Observación 14.** La diferencia en las definiciones de conjunto 1-upla dominante y conjunto dominante total, si bien son similares, está en considerar vecindades cerradas en la primera y vecindades abiertas en la segunda, y hacen que se presten para modelar diferentes situaciones problemáticas. Para el mismo grafo  $G$  presentado en la Figura 1.8 y 1.11, el número de 1-upla dominación,  $\gamma(G)$ , es igual a 3 (ver Ejemplo 6) mientras que el número de 1-dominación total,  $\gamma^t(G)$ , es igual a 4 (ver Ejemplo 13).

Una generalización natural del concepto anterior —introducida por Kulli en 1991 [54]— se obtiene al requerir que dentro de la vecindad abierta de cada vértice del grafo se ubiquen *al menos*  $k$  de los elementos del subconjunto de vértices en cuestión  $U$ , donde  $k$  es un número entero positivo fijo. En este caso,  $U$  será llamado un conjunto  $k$ -dominante total en el grafo. Formalmente,

**Definición 15.** Dados  $G$  y  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $U \subseteq V(G)$  es un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$  si

$$|N(v) \cap U| \geq k, \forall v \in V(G).$$

La noción de  $k$ -dominación total fue estudiada también bajo el nombre de  $k$ -upla dominación total por Henning y Kazemi en 2010 [45] y en una serie de artículos recientes como por ejemplo en [51, 56, 68]. La terminología  $k$ -upla dominación total se introdujo en analogía con la noción de “ $k$ -upla dominación”, introducida en 2000 por Harary y Haynes [42] y presentada en la sección anterior. En esta tesis, para evitar confusión, nos referiremos a este concepto como  $k$ -dominación total para así solo hacer uso de la palabra «upla» cuando nos referimos a la dominación definida con vecindad cerrada, vale decir a la  $k$ -upla dominación.

Para un entero positivo  $k$  fijo, el problema de la  $k$ -dominación total en un grafo dado  $G$ , consiste en hallar un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$  de menor tamaño.

**Definición 16.** El número de  $k$ -dominación total,  $\gamma_k^t(G)$ , es el cardinal de un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$  de menor tamaño posible, es decir:

$$\gamma_k^t(G) = \min \{|U| : U \text{ es un conjunto } k\text{-dominante total en } G\}.$$

Observar que  $\gamma^t(G) = \gamma_1^t(G)$  (número de 1-dominación total).

El problema de la  $k$ -dominación total se puede formular como uno de decisión de la siguiente manera:

**Problema de la  $k$ -dominación total, para  $k$  fijo (PkDT)**

INSTANCIA:  $G$  un grafo,  $\beta \in \mathbb{Z}^+$ .

PREGUNTA: ¿Tiene  $G$  un conjunto  $k$ -dominante total de tamaño  $\beta$  o menor?

**1.3.4. Complejidad computacional del problema de la  $k$ -dominación total**

Con respecto a los resultados de complejidad computacional, el problema de decisión PkDT es NP-completo. Más específicamente, para cada entero positivo  $k$ , el problema de  $k$ -dominación total es NP-completo en las clases de grafos que se detallan a continuación:

- grafos split [68],
- grafos doblemente cordales [68],
- grafos bipartitos [68],
- grafos caminos no dirigidos [56],
- para  $k \in \{2, 3\}$ , grafos bipartitos planares [2],

Además PkDT se puede resolver en tiempo polinomial en la clase de los grafos bipartitos cordales [68] y más aún, en tiempo lineal en la clase de grafos donde cada block es una clique, un ciclo o un grafo bipartito completo [56] y, más generalmente, en cualquier clase de grafos con parámetro clique-width acotado [26, 65].

Para  $k = 1$ , el problema se puede resolver en tiempo lineal en la clase de grafos de intervalos ([7, 14, 15, 52, 70, 69]).

A partir de un trabajo reciente, en un contexto más general dado por una gran clase de problemas de partición, se puede deducir que PkDT se resuelve en tiempo  $\mathcal{O}(n^{3k+4})$  en la clase de los grafos de intervalos donde  $n$  es el orden del grafo de entrada [12]. Detallamos la deducción del orden de este algoritmo en el Capítulo 2.

### 1.3.5. Problema de la $k$ -dominación

Dado un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$ ,  $U \subseteq V(G)$  es un conjunto  $k$ -dominante en  $G$  si cada vértice del grafo que no está en  $U$  es adyacente a al menos  $k$  vértices de  $U$ . Formalmente,

**Definición 17.** Dado  $G$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $U \subseteq V(G)$  es un conjunto  $k$ -dominante en  $G$  si

$$|N(v) \cap U| \geq k, \forall v \in V(G) - U.$$

Informalmente, la noción de conjunto  $k$ -dominante requiere que al *menos*  $k$  elementos de conjunto  $U$  pertenezcan a la vecindad abierta de cada vértice que no este en el conjunto.

Presentamos a continuación dos ejemplos de conjuntos  $k$ -dominantes para distintos valores de  $k$  ( para  $k = 1$  y  $k = 2$ , respectivamente).

**Ejemplo 18.** En el grafo  $G$  presentado en la Figura 1.12,  $U = \{v_2, v_3, v_6\}$  es un conjunto 1-dominante en  $G$ .

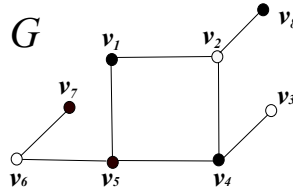


Figura 1.12: Conjunto dominante

Notar que  $U$  no es un conjunto 1-dominante total en  $G$  ya que  $N(v_6) = \{v_5, v_7\}$  y  $N(v_6) \cap U = \emptyset$ .

**Ejemplo 19.** En este caso el subconjunto de vértices  $U = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$  es un conjunto 2-dominante en  $G$ .

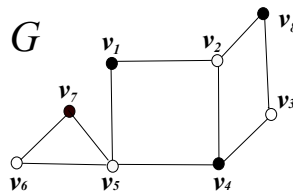


Figura 1.13: Conjunto 2-dominante

Notar que  $U$  no es:

- un conjunto 2-dominante total en  $G$  ya que  $N(v_2) = \{v_1, v_4, v_8\}$  y  $N(v_2) \cap U = \emptyset$ .
- un conjunto 2-upla dominante en  $G$  pues  $N[v_2] = \{v_1, v_2, v_4, v_8\}$  y  $|N[v_2] \cap U| = 1$ , vale decir, la vecindad cerrada de  $v_2$  no tiene por lo menos dos elementos en  $U$ .

**Definición 20.** El número de  $k$ -dominación,  $\gamma_k(G)$ , es el cardinal de un conjunto  $k$ -dominante en  $G$  de menor tamaño posible, es decir:

$$\gamma_k(G) = \min \{|U| : U \text{ es un conjunto } k\text{-dominante en } G\}.$$

Para un entero positivo  $k$  fijo, el problema de la  $k$ -dominación en un grafo dado  $G$ , consiste en hallar un conjunto  $k$ -dominante en  $G$  de tamaño  $\gamma_k(G)$ . De manera similar a  $PkUD$  y  $PkDT$ , el problema de la  $k$ -dominación puede formularse como un problema de decisión.

### 1.3.6. Complejidad computacional del problema de la $k$ -dominación

El problema de decisión asociado a la  $k$ -dominación es NP-completo para grafos generales. Más aún, para cada  $k$ , el problema de  $k$ -dominación es NP-completo en las clases de:

- grafos bipartitos [4],
- grafos split [55].

Además se puede resolver en tiempo lineal en:

- la clase de grafos donde cada block es una clique, un ciclo o un grafo bipartito completo (incluidos árboles, grafos block, cactus y grafos cactus-block) [55];
- en cualquier clase de grafos con clique-width acotado [26, 65] (ver también [22]).
- solo para  $k = 1$ , se puede resolver en tiempo lineal en la clase de grafos de intervalos ([8, 14, 47]).

Puede obtenerse también, siguiendo el mismo razonamiento mencionado en la Sección 1.3.4 y más detallado en el Capítulo 2, que el problema de la  $k$ -dominación puede resolverse el tiempo  $\mathcal{O}(n^{3k+4})$  en la clase de los grafos de intervalos, donde  $n$  es el orden del grafo de entrada.

Por último, agregamos que los problemas de  $k$ -dominación y de  $k$ -dominación total se estudiaron con respecto a sus propiedades de (in)aproximabilidad, tanto de modo general [23] como en clases de grafos restringidos [4], y también desde el punto de vista de la complejidad parametrizada [13, 48].

Concluimos este capítulo observando que todo conjunto  $k$ -dominante total en un grafo  $G$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  como así también, todo conjunto  $k$ -dominante total es un conjunto  $k$ -dominante. Luego se verifica la siguiente relación entre los mínimos tamaños de los conjuntos  $k$ -upla dominante,  $k$ -dominante y  $k$ -dominante total en un grafo  $G$ :

$$\gamma_{\times k}(G) \leq \gamma_k^t(G) \quad y \quad \gamma_k(G) \leq \gamma_k^t(G).$$



## Capítulo 2

*k*-dominación y *k*-dominación total en grafos de intervalos propios

## Resumen

En este capítulo se desarrollan algoritmos específicos para la  $k$ -dominación y la  $k$ -dominación total, y también para sus versiones ponderadas, en la clase de grafos de intervalos propios. Se basan en una reducción a la búsqueda de un camino más corto en un digrafo acíclico con peso en los arcos, definido a partir de un grafo de intervalos propios. El orden (polinomial) de los algoritmos es  $O(n^{4k+1})$ , donde  $n$  es la cantidad de vértices del grafo de intervalos propios dado. En la Sección 2.1, se justifica la necesidad del diseño de un algoritmo específico para esta clase de grafos de intervalos. En la Sección 2.2 se detalla la reducción diseñada que nos conduce al algoritmo que presentamos para el problema de la  $k$ -dominación total en esta clase. En la Sección 2.3 mostramos las modificaciones necesarias que deben hacerse al nuevo algoritmo para poder ser aplicado al problema de la  $k$ -dominación en grafos de intervalos propios. En la última sección, consideramos las versiones ponderadas de los dos problemas.

Los resultados de este capítulo fueron publicados en [20] y [21].

## 2.1. Análisis de algoritmos existentes

Como se detalló en el Capítulo 1, los problemas de  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total para  $k = 1$  pueden resolverse en tiempo lineal en la clase de grafos de intervalos ([8, 47, 14] y [14, 15, 52, 69, 70], respectivamente).

Sin embargo, no disponemos de un tal algoritmo específico para valores de  $k$  mayores a 1, salvo el que puede deducirse de un contexto más general. A continuación explicamos de manera breve esta deducción.

- En [12], Bui-Xuan et al. dan algoritmos para una gran clase de problemas de partición de vértices y subconjuntos de vértices. Los algoritmos se ejecutan en el tiempo  $\mathcal{O}(n^4 \cdot nec_d(T, \delta)^3)$ , donde  $n$  es el orden del grafo de entrada,  $d$  es un parámetro asociado al problema, y  $nec_d(T, \delta)$  es el número de clases de equivalencia de una relación de equivalencia específica del problema en subconjuntos de vértices, definidos en un árbol de descomposición dado  $(T, \delta)$  del grafo dado.
- Belmonte y Vatshelle muestran en [5, Lemma 3] que dado un grafo de intervalos  $G$  con  $n$ -vértices y un entero positivo  $d$ , se puede calcular en tiempo polinomial (de hecho, lineal) un árbol de descomposición  $(T, \delta)$  de  $G$  con  $nec_d(T, \delta) \leq n^d$ .

A partir de la combinación de los resultados expuestos en los dos apartados de arriba, y teniendo en cuenta que para los problemas de  $k$ -dominación y de  $k$ -dominación total no es difícil deducir que el parámetro  $d$  es nuestro valor  $k$ , disponemos entonces para cada entero positivo  $k$ , de un algoritmo para resolver el problema de  $k$ -dominación y de  $k$ -dominación total en la clase de los grafos de intervalos con  $n$ -vértices en el tiempo  $\mathcal{O}(n^{3k+4})$ .

Como no disponemos entonces de un algoritmo específico para nuestros problemas para valores de  $k$  mayores a 1, nos propusimos entonces desarrollar algoritmos específicos para estos problemas para todo valor de  $k$  en la clase de los grafos de intervalos **propios**.

Una primer conjetura natural que surge es si el algoritmo de Liao y Chang presentado en [58] o el de Lee y Chang en [57] para otra de las variaciones de dominación, la  $k$ -upla dominación, puede resolver también estos problemas simplemente “cambiando” en su desarrollo vecindades cerradas por vecindades abiertas. La respuesta fue negativa y la causa de ello tiene que ver con que esos trabajos consideran algunos problemas de dominación en las clases de grafos fuertemente cordales y dualmente cordales. Mientras que ambas son superclases de la clase de grafos de intervalos propios, los problemas de dominación estudiados en [57, 58] tratan con vecindades *cerradas*, y para esos casos las propiedades estructurales de los grafos fuertemente cordales y de los dualmente cordales son útiles para el diseño de algoritmos de tiempo lineal. En contraste, los problemas de  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total se definen a través de vecindades *abiertas* y los resultados de [57, 58] no parecen ser aplicables o fácilmente adaptables a estos problemas.

En particular, Liao y Chang desarrollan en [58] un algoritmo de tiempo lineal para el problema de  $M$ -dominación (un problema que generaliza al problema de la  $k$ -upla dominación)

en la clase de grafos fuertemente cordales. En las observaciones finales de su trabajo [58], los autores conjeturan que sus argumentos para el problema de la  $k$ -upla dominación pueden adaptarse para resolver el problema de la  $k$ -dominación total para grafos fuertemente cordales simplemente “reemplazando vecindades cerradas en la mayoría de ellos por vecindades abiertas”. Además, para el problema de la  $k$ -dominación, argumentan que no es posible adaptar sus resultados y que habría que realizar un nuevo enfoque para la  $k$ -dominación. Si bien estamos totalmente de acuerdo con esta última declaración, estamos convencidos de que se necesita un nuevo enfoque también para la  $k$ -dominación total. En particular, no fuimos capaces de ver cómo modificar su método de modo que funcione para la  $k$ -dominación total. Más precisamente, la declaración análoga a la del Lema 2 en [58] para la variante “total” del problema de  $M$ -dominación, falla. En lo que sigue mostramos con un contraejemplo por qué el algoritmo presentado por Liao y Chang en [58] para el problema de  $k$ -upla dominación no puede adaptarse. Para ello, como haremos uso de la terminología y notación de [58], detallamos la necesaria a continuación.

**Definición 21** (Liao y Chang [58]). *Dado un grafo  $G$ , a cada vértice  $v \in V(G)$  le asociamos una etiqueta  $M(v) = (t(v), k(v))$ , donde  $t(v) \in \{B, R\}$  y  $k(v)$  es un entero no negativo. La interpretación de la etiqueta es que queremos hallar un conjunto dominante  $D$  que contenga a todos los vértices  $v$  tal que  $t(v) = R$  (llamados vértices requeridos), tal que cada vértice está dominado por al menos  $k(v)$  vértices en  $D$ . Más precisamente, un conjunto  $M$ -dominante en  $G$  es un subconjunto  $D$  de  $V(G)$  tal que se verifican las siguientes dos condiciones:*

1. Si  $t(v) = R$  entonces  $v \in D$ .
2.  $|N[v] \cap D| \geq k(v)$  para todo  $v \in V(G)$ .

El número de  $M$ -dominación,  $\gamma_M(G)$ , es el tamaño mínimo entre todos los conjuntos  $M$ -dominantes en  $G$ .

No es difícil notar que un conjunto  $k$ -upla dominante es un conjunto  $M$ -dominante con  $M(v) = (B, k)$  para todos los vértices  $v \in V(G)$ .

El resultado siguiente, entre otros, conducen en [58] al diseño de un algoritmo lineal para resolver el problema de la  $k$ -upla dominación en grafos fuertemente cordales:

**Lema 22** (Lemma 2 en [58]). *Sea  $G$  un grafo fuertemente cordal en el cual  $x$  es un vértice simple con  $N[x] = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ , donde  $x_1 = x$  y  $N[x_i] \subseteq N[x_j]$  para  $1 \leq i \leq j \leq r$ . Sea  $s = k(x) - |\{x_i \in N[x] : t(x_i) = R\}|$  y  $\hat{B} = \{x_i \in N[x] : t(x_i) = B\} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_b}\}$  donde  $i_1 > i_2 > \dots > i_b$ . Si  $s > 0$  entonces*

$$\gamma_M(G) = \gamma_{M'}(G),$$

siendo  $M' = (t'(v), k'(v))$  con  $k'(v) = k(v)$  para todo  $v \in V(G)$ ,  $t'(x_{i_j}) = R$  para  $1 \leq j \leq s$  y  $t'(v) = t(v)$  en el resto.

Pensemos en la versión natural que se obtiene de un conjunto  $M$ -dominante total en un grafo  $G$ , definida de manera similar a la de la Definición 21.

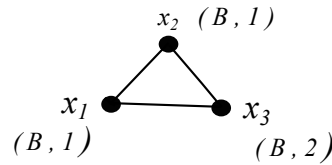
Específicamente veamos que el lema anterior adaptado al caso de la  $k$ -dominación total en grafos fuertemente cordales no se verifica. Dicha adaptación sería la siguiente:

Sea  $G$  un grafo fuertemente cordal en el cual  $x$  es un vértice simple con  $N[x] = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ , donde  $x_1 = x$  y  $N[x_i] \subseteq N[x_j]$  para  $1 \leq i \leq j \leq r$ . Sea  $s = k(x) - |\{x_i \in N(x) : t(x_i) = R\}|$  y  $\hat{B} = \{x_i \in N(x) : t(x_i) = B\} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_b}\}$  donde  $i_1 > i_2 > \dots > i_b$ . Si  $s > 0$  entonces

$$\gamma_M^t(G) = \gamma_{M'}^t(G),$$

siendo  $M' = (t'(v), k'(v))$  con  $k'(v) = k(v)$  para todo  $v \in V(G)$ ,  $t'(x_{i_j}) = R$  para  $1 \leq j \leq s$  y  $t'(v) = t(v)$  en el resto; donde  $\gamma_M^t(G)$  es el mínimo tamaño de un conjunto  $M$ -dominante total en  $G$ .

Nuestro contraejemplo es entonces el siguiente: sea  $G$  el grafo completo con conjunto de vértices  $\{x_1, x_2, x_3\}$  y etiquetas dadas por  $M(x_1) = M(x_2) = (B, 1)$  y  $M(x_3) = (B, 2)$ .



Entonces,  $x = x_1$  es un vértice simple en  $G$  con  $N(x) = \{x_2, x_3\}$ . Además, considerando ahora las vecindades abiertas en lugar de las vecindades cerradas, tenemos  $k(x) = 1$ ,  $s = k(x) - |\{x_i \in N(x) : t(x_i) = R\}| = 1$  y  $\hat{B} = \{x_i \in N(x) : t(x_i) = B\} = \{x_3, x_2\}$ . Es fácil ver que el grafo  $G$  tiene un (único) conjunto  $M$ -dominante “total” de mínimo tamaño, éste es  $\{x_1, x_2\}$ , lo que implica  $\gamma_M^t(G) = 2$ . Considerando  $M'$  como se indica más arriba, tenemos  $M'(x_1) = M'(x_2) = (B, 1)$  y  $M'(x_3) = (R, 2)$ . Por otro lado, el hecho de que  $M'(x_3) = (R, 2)$  implica que  $\{x_1, x_2, x_3\}$  es el único conjunto  $M'$ -dominante total en  $G$ , implicando  $\gamma_{M'}^t(G) = 3$ . Luego el análogo de [58, Lemma 2] para el problema de la  $M$ -dominación total no es cierto.

Más aún, para un grafo de intervalos propios como el grafo  $G$  que se muestra en la Figura 2.6(b), se puede verificar que el único conjunto de 2-dominante total mínimo en  $G$  es el conjunto  $\{2, 3, 5, 6, 7\}$ , mientras que la adaptación natural del algoritmo de Liao y Chang de [58] obtenida al considerar vecindades abiertas en lugar de cerradas, calcula una solución estrictamente mayor, a saber,  $\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ .

## 2.2. Una reducción para la $k$ -dominación total

Consideremos un entero positivo  $k$  y un grafo de intervalos propios  $G = (V, E)$ . Como ya fue mencionado en el Capítulo 1, se conocen varios algoritmos de reconocimiento en tiempo lineal para grafos de intervalos propios por lo cual podemos suponer que  $G$  tiene un modelo de intervalos propios:

$$\mathcal{I} = \{I_j \mid j = 1, \dots, n\} \text{ donde } I_j = [a_j, b_j] \text{ para cada } j = 1, \dots, n.$$

También podemos asumir que no hay dos intervalos que coinciden. Además, denotando con " $<$ " la relación de orden en  $\mathbb{R}$  y dado que en un modelo de intervalos propios el orden de los extremos finales izquierdos de los intervalos es igual al orden de los extremos finales derechos, consideramos que los intervalos se ordenan de acuerdo con sus extremos finales izquierdos de forma creciente, es decir,

$$a_1 < \dots < a_n.$$

Denotamos  $I_j < I_\ell$  si  $j < \ell$  y decimos en este caso que  $I_j$  está *a la izquierda de*  $I_\ell$  y  $I_\ell$  está *a la derecha de*  $I_j$ . Además, denotamos  $I_j \leq I_\ell$  si  $j \leq \ell$ .

Dados tres intervalos  $I_j, I_\ell, I_m \in \mathcal{I}$ , decimos que el intervalo  $I_\ell$  está *entre* los intervalos  $I_j$  e  $I_m$  si  $j < \ell < m$  y que el intervalo  $I_j$  *interseca* al intervalo  $I_\ell$  si  $I_j \cap I_\ell \neq \emptyset$ .

A continuación describimos brevemente el enfoque realizado en este capítulo:

Dado un grafo de intervalos propios  $G$ , construimos un digrafo acíclico  $D_k^t$  ponderado en los arcos (donde el supraíndice " $t$ " significa "total" y  $k$  es la constante que especifica el problema) y demostramos que el problema de la  $k$ -dominación total en  $G$  puede reducirse a buscar un camino más corto en  $D_k^t$  (ver descripción de este problema en la Sección 1.2.1).

En lo que sigue, primero presentamos la definición del digrafo  $D_k^t$  e ilustramos la construcción en un ejemplo (Ejemplo 23). Luego explicamos la idea disparadora detrás de la reducción y, finalmente, probamos la validez de la reducción.

A lo largo de este capítulo, los vértices del grafo  $G$  son denotados generalmente con  $u$  o  $v$ , y los nodos de  $D_k^t$  con  $s$ ,  $s'$ ,  $s''$ .

Cada nodo de  $D_k^t$  es una secuencia de intervalos,  $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_q})$ , del conjunto  $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cup \{I_0, I_{n+1}\}$ , donde  $I_0, I_{n+1}$  son dos nuevos intervalos "ficticios" tal que, como se ilustra en la Figura 2.1, verifican:

$$I_0 < I_1 \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad I_n < I_{n+1} \quad y \quad I_n \cap I_{n+1} = \emptyset.$$

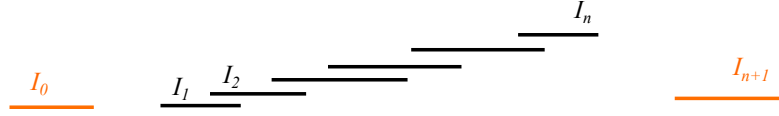


Figura 2.1: Modelo  $\mathcal{I}'$  de intervalos propios de  $G$ .

De manera natural, tenemos una relación de orden  $<$  en  $\mathcal{I}'$ .

Antes de definir el digrafo  $D_k^t$ , introducimos algunas otras definiciones y notaciones que usaremos en este capítulo:

- Decimos que un intervalo  $I \in \mathcal{I}'$  está *asociado a* un nodo  $s$  de  $D_k^t$  si aparece en la secuencia  $s$ .
- Dado un nodo  $s$  de  $D_k^t$ , se denota el conjunto de todos los intervalos asociados a  $s$  por  $\mathcal{I}_s$ .
- El primero y el último intervalo en  $\mathcal{I}_s$  con respecto al orden  $<$  de  $\mathcal{I}'$  se denotan con  $\text{mín}(s)$  y  $\text{máx}(s)$ , respectivamente.
- Decimos que una secuencia  $(I_{i_1}, \dots, I_{i_q})$  de intervalos de  $\mathcal{I}$  es *creciente* si  $i_1 < \dots < i_q$ .

A continuación presentamos la construcción del digrafo  $D_k^t$  definido a partir de un grafo de intervalos propios  $G$  dado:

Definimos el conjunto de nodos de  $D_k^t$  como  $V(D_k^t) = \{I_0, I_{n+1}\} \cup S \cup B$ , donde:

- Tanto  $I_0$  como  $I_{n+1}$  es una secuencia de intervalos de longitud uno.<sup>1</sup>
- $S$  es el conjunto de los llamados *nodos pequeños*. El conjunto  $S$  consiste exactamente en aquellas secuencias crecientes de intervalos,  $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_q})$ , de  $\mathcal{I}$  (no necesariamente consecutivos) de manera que verifiquen las siguientes propiedades, ilustradas algunas de ellas en la Figura 2.2.

- (1)  $k + 1 \leq q \leq 2k - 1$ ,
- (2)  $I_{i_j} \cap I_{i_{j+1}} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, q - 1\}$  y
- (3) cada intervalo  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $\text{mín}(s) \leq I \leq \text{máx}(s)$  intersecta a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_s \setminus \{I\}$ .

<sup>1</sup>Esto asegura que los intervalos  $\text{mín}(s)$  y  $\text{máx}(s)$  estén bien definidos también para  $s \in \{I_0, I_{n+1}\}$ , en cuyo caso ambos son iguales a  $s$ .

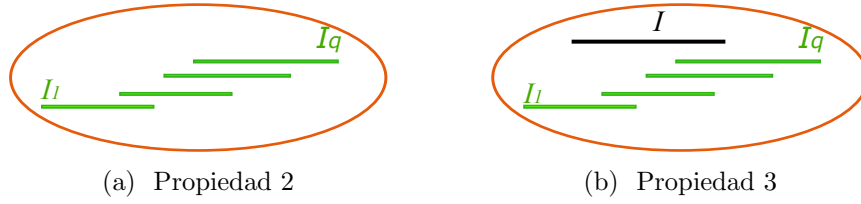


Figura 2.2: Nodo pequeño  $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_q})$

- $B$  es el conjunto de los llamados *nodos grandes*. El conjunto  $B$  consiste exactamente en aquellas secuencias crecientes de intervalos,  $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{2k}})$ , de  $\mathcal{I}$  (no necesariamente consecutivos) de longitud  $2k$  tal que verifican las siguientes propiedades, ilustradas en la Figura 2.3:

- (1)  $I_{i_j} \cap I_{i_{j+1}} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, 2k - 1\}$  y
- (2) cada intervalo  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $I_{i_k} \leq I \leq I_{i_{k+1}}$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_s \setminus \{I\}$ .

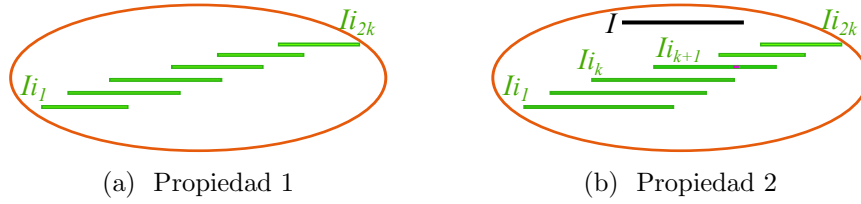


Figura 2.3: Nodo grande  $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{2k}})$

Definimos el conjunto de arcos de  $D_k^t$  como  $E(D_k^t) = E_0 \cup E_1$ , donde:

- $E_0$  consiste en los pares ordenados  $(s, s') \in V(D_k^t) \times V(D_k^t)$  tales que satisfacen las siguientes propiedades, ilustradas en la Figura 2.4:
- (1)  $\max(s) < \min(s')$  y  $\max(s) \cap \min(s') = \emptyset$ ,
  - (2) cada intervalo  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $\max(s) < I < \min(s')$  interseca a al menos  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}_s \cup \mathcal{I}_{s'}$ ,
  - (3) si  $s$  es un nodo grande, entonces los  $k + 1$  intervalos más a la derecha asociados a  $s$  se intersecan dos a dos, y
  - (4) si  $s'$  es un nodo grande, entonces los  $k + 1$  intervalos más a la izquierda asociados a  $s'$  se intersecan dos a dos.

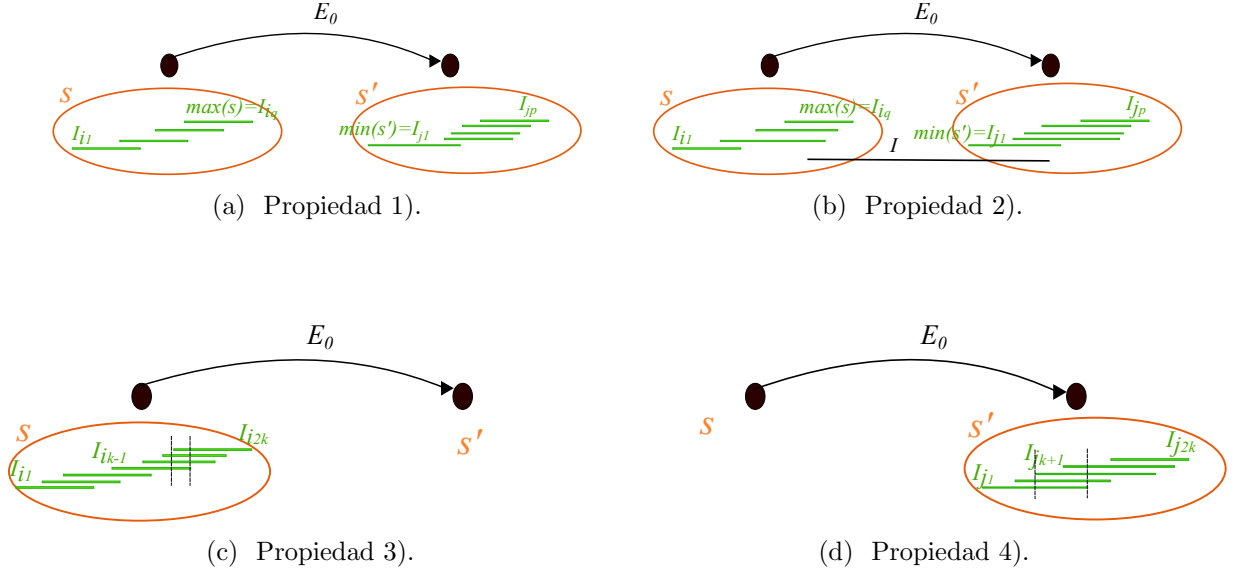


Figura 2.4: Propiedades de un arco  $E_0$

- $E_1$  consiste en los pares ordenados  $(s, s') \in V(D_k^t) \times V(D_k^t)$  tales que  $s, s' \in B$  y existen  $2k + 1$  intervalos  $I_{i_1}, \dots, I_{i_{2k+1}}$  en  $\mathcal{I}$  tal que  $s = (I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{2k}})$  y  $s' = (I_{i_2}, I_{i_3}, \dots, I_{i_{2k+1}})$ , como ilustramos en la Figura 2.5.

Observemos que los arcos pertenecientes al conjunto  $E_1$  no tienen por extremo ni al nodo  $I_0$  ni al nodo  $I_{n+1}$ .

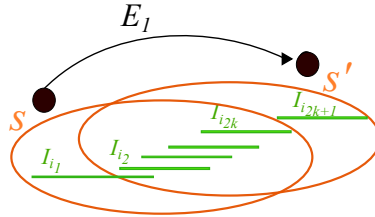


Figura 2.5: Arco  $E_1$

A cada arco  $(s, s')$  de  $D_k^t$  le asociamos una longitud no negativa  $\ell(s, s')$ , definida de la siguiente manera:

$$\ell(s, s') = \begin{cases} |\mathcal{I}_{s'}|, & \text{si } (s, s') \in E_0 \text{ y } s' \neq I_{n+1}; \\ 1, & \text{si } (s, s') \in E_1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.1)$$

La *longitud de un camino dirigido* en  $D_k^t$  se define, como de costumbre, como la suma de las longitudes de sus arcos.

Veamos a continuación el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 23.** Consideramos el problema de encontrar un mínimo conjunto 2-dominante total en el grafo  $G$  dado por el modelo de intervalos propios  $\mathcal{I}$  representado en la Figura 2.6 (a).

Usando la reducción descrita anteriormente, obtenemos el digrafo  $D_2^t$  representado en la Figura 2.6 (c) junto con la función de longitud en los arcos, donde, para mayor claridad, los nodos  $(I_{i_1}, \dots, I_{i_p})$  de  $D_2^t$  se identifican con las cadenas de índices correspondientes  $i_1 i_2 \dots i_p$ .

También, para mayor claridad en el gráfico, omitimos representar en la figura a los nodos (irrelevantes) que no pertenecen a ningún camino dirigido desde  $I_0$  a  $I_{n+1}$ .

Hay un único camino más corto desde  $I_0$  a  $I_9$  en  $D_2^t$ , a saber  $(0, 2356, 3567, 9)$ . Ese camino corresponde al conjunto  $\{2, 3, 5, 6, 7\}$ , que es el único conjunto 2-dominante total en  $G$  de mínimo tamaño.

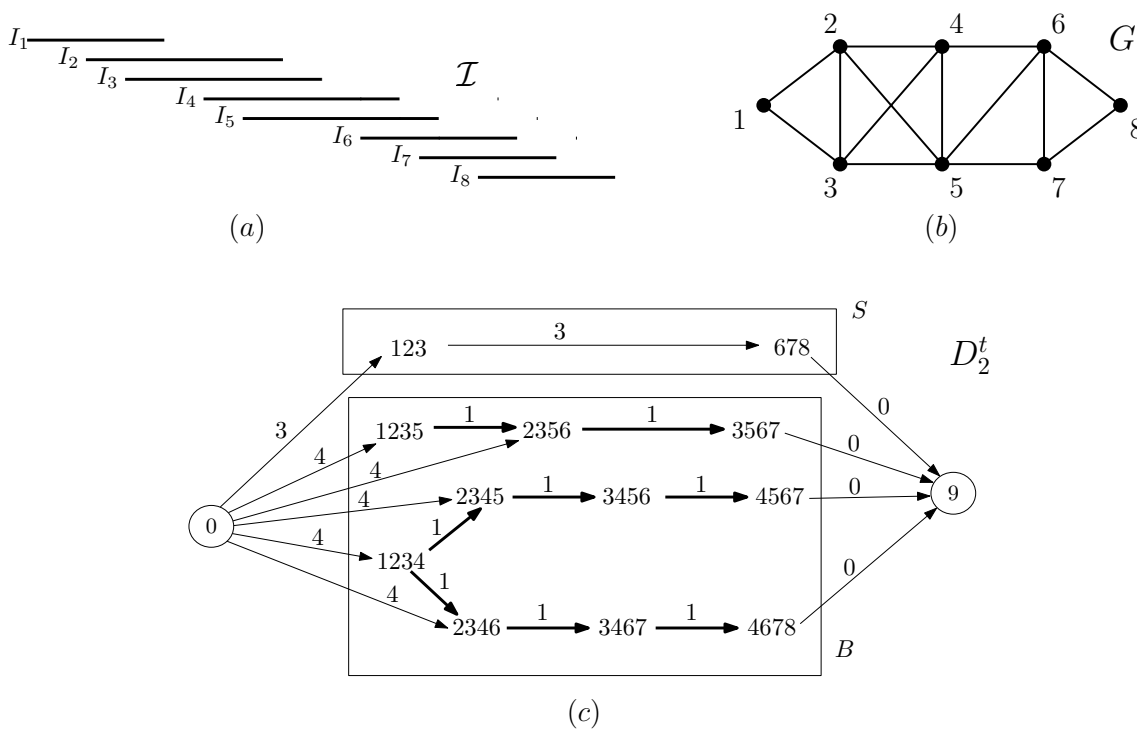


Figura 2.6: (a) Un modelo de intervalos propios  $\mathcal{I}$ , (b) el correspondiente grafo de intervalos propios  $G$  y (c) una parte del digrafo  $D_2^t$  definido sobre  $G$ , donde se muestran solo los nodos que se encuentran en algún camino dirigido de  $I_0$  a  $I_9$ . Los arcos en  $E_1$  se muestran en negritas.

El siguiente lema muestra una condición necesaria sobre las componentes conexas de un grafo  $G$ .

**Lema 24.** *Dado un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$ , sean  $U$  un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$  y  $C$  una componente conexa de  $G[U]$ . Entonces  $|V(C)| \geq k + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $u \in V(C)$ . Como  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$ ,  $u$  tiene al menos  $k$  vecinos en  $U$ . Sin embargo, dado que  $C$  es una componente conexa de  $G[U]$ , todos los vecinos de  $u$  en  $U$  están de hecho en  $C$ . Así,  $|V(C)| \geq |\{u\} \cup (N(u) \cap U)| \geq k + 1$ .  $\square$

La siguiente proposición establece la validez de la reducción anteriormente realizada.

**Proposición 25.** *Dado un grafo de intervalos propios  $G$  y un entero positivo  $k$ , sea  $D_k^t$  el digrafo construido como se explicó previamente. Entonces  $G$  tiene un conjunto  $k$ -dominante total de tamaño  $c$  si y solo si  $D_k^t$  tiene un camino dirigido de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  de longitud  $c$ .*

Antes de dar una prueba detallada de la Proposición 25, explicamos a continuación la intuición detrás de la reducción.

El subgrafo de  $G$  inducido por un conjunto  $k$ -dominante total mínimo puede contener varias componentes conexas. Estas componentes, así como los vértices dentro de ellas, se ordenan naturalmente de izquierda a derecha. El siguiente lema será de utilidad para la comprensión de la definición de los nodos en  $D_k^t$ .

**Lema 26.** *Un grafo de intervalos propios conexo  $G$  tiene un camino Hamiltoniano.*

*Demostración.* Queremos probar que  $G$  tiene un camino Hamiltoniano, es decir un camino (secuencia de vértices adyacentes) que «visita» todos los vértices del grafo una sola vez.

Sea  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{I} = \{I_j \mid j = 1, \dots, n\}$  un modelo de intervalos propios para  $G$  donde  $I_j = [a_j, b_j]$  para cada  $j = 1, \dots, n$ . Asumimos que los intervalos están ordenados según sus extremos izquierdos, es decir  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Por esto y dado que  $G$  es un grafo conexo resulta que:

$$I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset \text{ para todo } j = 1, \dots, n - 1.$$

Esto significa que  $v_j v_{j+1} \in E(G)$  para todo  $j = 1, \dots, n - 1$ ; así  $v_1 v_2 \dots v_n$  es un camino Hamiltoniano en  $G$ .  $\square$

Dado que cada subgrafo inducido conexo de un grafo de intervalos propios tiene un camino Hamiltoniano, los nodos de  $D_k^t$  corresponden a caminos en  $G$  (ver propiedad (2) para nodos pequeños o propiedad (1) para nodos grandes).

Como cada vértice de  $G$  tiene al menos  $k$  vecinos en el conjunto  $k$ -dominante total, cada componente conexa tiene al menos  $k + 1$  vértices según el Lema 24. Las componentes conexas con al menos  $2k$  vértices dan lugar a caminos dirigidos en  $D_k^t$  que consisten en nodos grandes

y arcos en  $E_1$ . Cada componente conexa con menos de  $2k$  vértices corresponde a un único nodo pequeño en  $D_k^t$ , que puede verse como un camino trivial dirigido en  $D_k^t$ . Los caminos resultantes heredan el orden de izquierda a derecha de las componentes conexas. Cualquier dos caminos consecutivos (con respecto a este orden) se unen en  $D_k^t$  por un arco en  $E_0$ . Además,  $I_0$  se une al nodo más a la izquierda del camino por un arco en  $E_0$  y, similarmente, el nodo más a la derecha del camino se une a  $I_{n+1}$  por un arco en  $E_0$ . Agregando tales arcos se produce un camino dirigido de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  de la longitud deseada.

El proceso anterior se puede revertir. Dado un camino dirigido  $P$  en  $D_k^t$  desde  $I_0$  a  $I_{n+1}$ , podemos obtener un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$  del tamaño deseado como el conjunto de todos los vértices correspondientes a intervalos en  $\mathcal{I}$  asociados a los nodos internos de  $P$ . Observemos que la construcción del digrafo  $D_k^t$  implica que dicho conjunto es de hecho un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$ . Por ejemplo, la propiedad (3) de la definición de arcos en  $E_0$  garantiza que el vértice correspondiente al intervalo más a la derecha asociado a  $s \in B$  (donde  $(s, s') \in E_0$ ) está  $k$ -dominado. La condición está relacionada con el hecho de que en los grafos de intervalos propios, la vecindad de un vértice representado por un intervalo  $[a, b]$  se divide en dos cliques una para todos los intervalos que contienen a “ $a$ ” y otra para todos los intervalos que contienen a “ $b$ ”.

## Prueba de la Proposición 25

Para la prueba de la Proposición 25 tenemos en cuenta toda la notación introducida hasta el Ejemplo 23 y además agregamos la siguiente notación: para  $X \subseteq V(G)$ , denotamos por  $\mathcal{I}^X$  al conjunto de intervalos en  $\mathcal{I}$  correspondiente a los vértices en  $X$ .

Primero, supongamos que  $G$  tiene un conjunto  $k$ -dominante total  $U$  de tamaño  $c$  y probemos que  $D_k^t$  tiene un camino dirigido de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  de longitud  $c$ .

Las componentes conexas de  $G[U]$  se pueden ordenar naturalmente de izquierda a derecha, digamos como  $C_1, \dots, C_r$ . A cada componente conexa  $C_i$  le asociaremos un camino  $P^i$  en  $D_k^t$  definido como una secuencia de nodos. El camino dirigido  $P$  de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  en  $D_k^t$  deseado se obtendrá combinando los caminos  $P^i$ , respetando el orden, en una sola secuencia de nodos precedida por  $I_0$  y seguida por  $I_{n+1}$ . A continuación se detalla como se definen los caminos  $P^i$ .

Decimos que una componente conexa  $C_i$  es *pequeña* si  $|V(C_i)| < 2k$  y *grande*, en caso contrario.

A cada componente conexa pequeña  $C_i$  le asociamos una secuencia  $s^i = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{p_i}})$ , que consiste en  $p_i = |V(C_i)|$  intervalos correspondientes a los vértices de  $C_i$ , ordenados de manera creciente.

La demostración se realizará en etapas a través de la prueba de los siguientes lemas:

**Lema 27.** *Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , si  $C_i$  es una componente conexa pequeña de  $G[U]$  entonces  $s^i$  es un nodo pequeño de  $D_k^t$ .*

*Demostración.* Por Lema 24,  $C_i$  tiene al menos  $k + 1$  vértices que, junto con el hecho de que  $C_i$  es pequeña, implica la propiedad (1) de la definición de un nodo pequeño.

La propiedad (2) se deduce del hecho de que  $\mathcal{I}$  es un modelo de intervalos propios de  $G$  y  $C_i$  es conexo.

Para mostrar que  $s^i$  satisface la propiedad (3) de la definición de un nodo pequeño, consideremos un intervalo  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $\min(s^i) \leq I \leq \max(s^i)$ . Sea  $u$  el vértice de  $G$  correspondiente a  $I$ . Como  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante total, el vértice  $u$  tiene al menos  $k$  vecinos en  $U$ . Como  $\min(s^i) \leq I \leq \max(s^i)$ , todos los vecinos de  $u$  en  $U$  deben pertenecer a  $C_i$ , más específicamente,  $N(u) \cap U \subseteq V(C_i) \setminus \{u\}$ . De ello deducimos que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_{s^i} \setminus \{I\}$ , estableciendo así la propiedad (3).  $\square$

El camino  $P^i$  asociado a la componente conexa pequeña  $C_i$  es un camino que tiene a  $s^i$  como único nodo.

Sea  $C_i$  una componente conexa grande y sea  $p_i = |V(C_i)|$ . Entonces  $p_i \geq 2k$ . Sean  $I_{j_1}, \dots, I_{j_{p_i}}$  los intervalos correspondientes a los vértices de  $C_i$ , ordenados de manera creciente. Por cada  $q \in \{1, \dots, p_i - 2k + 1\}$ , denotamos por  $s_q^i$  la subsecuencia de estos intervalos de longitud  $2k$  que comienzan en el  $q$ -ésimo intervalo, es decir,  $s_q^i = (I_{j_q}, I_{j_{q+1}}, \dots, I_{j_{q+2k-1}})$ .

**Lema 28.** *Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , si  $C_i$  es una componente conexa grande de  $G[U]$  entonces la secuencia  $s_q^i$  es un nodo grande de  $D_k^t$ , para cada  $q \in \{1, \dots, p_i - 2k + 1\}$ .*

*Demostración.* La propiedad (1) en la definición de nodo grande la deducimos a partir de que  $\mathcal{I}$  es un modelo de intervalos propios de  $G$  y  $C_i$  es conexo.

Para demostrar que  $s_q^i$  satisface la propiedad (2) de la definición de nodo grande, consideremos un intervalo  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $I_{j_{q+k-1}} \leq I \leq I_{j_{q+k}}$  y  $u$  el vértice de  $G$  correspondiente a  $I$ . Como  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante total, el vértice  $u$  tiene al menos  $k$  vecinos en  $U$ . Como  $I_{j_1} \leq I \leq I_{j_{p_i}}$ , todos los vecinos de  $u$  en  $U$  deben pertenecer a  $C_i$ . De eso deducimos que  $I$  interseca a al menos a  $k$  intervalos del conjunto  $\{I_{j_1}, \dots, I_{j_{p_i}}\} \setminus \{I\}$ .

Supongamos por contradicción que  $I$  interseca estrictamente a menos que  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_{s_q^i} \setminus \{I\} = \{I_{j_q}, I_{j_{q+1}}, \dots, I_{j_{q+2k-1}}\} \setminus \{I\}$ . Como  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\{I_{j_1}, \dots, I_{j_{p_i}}\} \setminus \{I\}$ , hay un intervalo, denominado  $I'$ , en el conjunto  $\{I_{j_1}, \dots, I_{j_{p_i}}\} \setminus \mathcal{I}_{s_q^i}$  tal que  $I \cap I' \neq \emptyset$ . Observemos que  $\{I_{j_1}, \dots, I_{j_{p_i}}\} \setminus \mathcal{I}_{s_q^i} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$  donde  $\mathcal{I}_1 = \{I_{j_1}, \dots, I_{j_{q-1}}\}$  y  $\mathcal{I}_2 = \{I_{j_{q+2k}}, \dots, I_{j_{p_i}}\}$ .

- Supongamos primero que  $I' \in \mathcal{I}_1$ , esto es,  $I' = I_{j_\alpha}$  para algún  $\alpha \in \{1, \dots, q - 1\}$ .

Dado que  $\mathcal{I}$  es un modelo de intervalos propios de  $G$ , las condiciones  $I_{j_{q+k-1}} \leq I \leq I_{j_{q+k}}$  y  $I_{j_{q+k-1}} \cap I_{j_{q+k}} \neq \emptyset$  implican que el intervalo  $I$  interseca a cada uno de los dos intervalos  $I_{j_{q+k-1}}$  y  $I_{j_{q+k}}$  (posiblemente  $I \in \{I_{j_{q+k-1}}, I_{j_{q+k}}\}$ ). Del mismo modo, el hecho de que  $I$  interseca a ambos intervalos  $I' = I_{j_\alpha}$  y  $I_{j_{q+k}}$  implica que  $I$  también interseca a cada uno de los intervalos en el conjunto  $\{I_{j_\alpha}, I_{j_{\alpha+1}}, \dots, I_{j_{q+k}}\}$ ; en particular,  $I$  interseca a cada uno de los  $k + 1$  intervalos en el conjunto  $\{I_{j_q}, I_{j_{q+1}}, \dots, I_{j_{q+k}}\}$ , todos los cuales están

en  $\mathcal{I}_{s_q^i}$ . De esto se desprende que ese intervalo  $I$  interseca a por lo menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_{s_q^i} \setminus \{I\}$ , contradiciendo la suposición sobre  $I$ .

- El caso  $I' \in \mathcal{I}_2$  es similar al caso  $I' \in \mathcal{I}_1$ .

Esto establece la propiedad (2). Así,  $s_q^i$  es un nodo grande. □

A cada componente conexa grande  $C_i$  le asociamos una secuencia  $P^i$  definida como  $P^i = (s_1^i, \dots, s_{p_i-2k+1}^i)$ .

Denotamos por  $P$  la secuencia obtenida mediante la concatenación de las secuencias  $P^i$  en una sola secuencia precedida por  $I_0$  y seguida por  $I_{n+1}$  en el orden natural, es decir concatenamos las secuencias en el siguiente orden:

$$I_0, P^1, \dots, P^r, I_{n+1}.$$

Por el Lema 27 y 28,  $P$  es una secuencia de nodos de  $D_k^t$ .

Notemos que  $U \neq \emptyset$ , las secuencias  $P^i$  no tienen elementos comunes y ninguna de ellas contiene a  $I_0$  o  $I_{n+1}$ . Por lo tanto,  $P$  es una secuencia de al menos 3 nodos.

Para cada nodo  $s$  de  $P$  diferente de  $I_0$  y  $I_{n+1}$ , los vértices de  $G$  correspondientes a los intervalos asociados a  $s$  pertenecen todos a la misma componente conexa de  $G[U]$ . Denotamos dicha componente conexa con  $C^s$ .

**Lema 29.**  *$P$  es un camino dirigido desde  $I_0$  a  $I_{n+1}$  en  $D_k^t$ , es decir, todo par de nodos consecutivos de  $P$  forman un arco en  $D_k^t$ .*

*Demostración.* Sea  $s, s'$  un par de nodos consecutivos de  $P$ . Claramente,  $s \neq I_{n+1}$ . Consideremos tres subcasos dependiendo de si  $s = I_0$ ,  $s \in S$ , o  $s \in B$ .

*Caso 1.*  $s = I_0$ .

Veamos que  $(s, s') \in E_0$ . En efecto, la propiedad (1) de la definición de arcos en  $E_0$  claramente se verifica, al igual que la propiedad (3) (ya que  $I_0 \notin B$ ).

Para probar la propiedad (2), consideremos un intervalo  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $\max(s) < I < \min(s')$ . Como  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante total, el intervalo  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}^U$ . Como  $I < \min(s')$  y  $\min(s')$  es el intervalo más a la izquierda correspondiente a un vértice de  $U$ , se deduce que  $I$  se interseca con los  $k$  intervalos más a la izquierda de  $\mathcal{I}^U$ . Todos estos intervalos pertenecen a vértices de la componente conexa  $C_1$ , y por lo tanto a  $\mathcal{I}_{s'}$ . Esto establece la propiedad (2).

Un argumento similar prueba que si  $s' \in B$ , entonces para asegurarnos de que el vértice correspondiente a  $\min(s')$  tenga al menos  $k$  vecinos en  $U$ , el intervalo  $\min(s')$  debe intersecar a  $k$  intervalos asociados a  $s'$  inmediatamente seguidos de  $\min(s')$  en la secuencia. Esto implica

que los  $k+1$  intervalos más a la izquierda asociados a  $s'$  se intersecan dos a dos, estableciendo así la veracidad de la propiedad (4).

De ello deducimos que  $(s, s') \in E_0$ .

*Caso 2.  $s \in S$ .*

Veamos que  $(s, s') \in E_0$ . La propiedad (1) de la definición de los arcos en  $E_0$  la obtenemos de la construcción de  $P$  y del hecho de que  $C^s \neq C^{s'}$ .

La propiedad (2) la deducimos de la construcción de  $P$  junto con el hecho de que  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$ .

La propiedad (3) se satisface trivialmente. Un argumento similar al del caso  $s = I_0$  establece la veracidad de la propiedad (4).

De ello se deduce que  $(s, s') \in E_0$ , como se afirma.

*Caso 3.  $s \in B$ .*

Si  $s' \in S$ , concluimos que  $(s, s') \in E_0$  por simetría con el caso  $s \in S, s' \in B$ .

Si  $s' = I_{n+1}$ , concluimos que  $(s, s') \in E_0$  por simetría con el caso  $s = I_0$ .

Sea ahora  $s' \in B$ . Si  $C^s \neq C^{s'}$ , luego podemos usar un argumento similar como en el caso  $s \in S$  para mostrar que  $(s, s') \in E_0$ . Si  $C^s = C^{s'}$ , sea  $i \in \{1, \dots, r\}$  el índice tal que  $C^s = C_i$ . La construcción de  $P$  implica que  $s$  y  $s'$  son nodos de  $P^i$  tal que  $s = s_q^i$  y  $s' = s_{q+1}^i$  para algún  $q \in \{1, \dots, p_i - 2k\}$  donde  $p_i = |V(C_i)|$ . Las definiciones de  $s_q^i$  y  $s_{q+1}^i$  implican que  $(s, s') \in E_1$ , probando en particular que  $(s, s')$  es un arco de  $D_k^t$ .  $\square$

Además, la definición de la función de longitud  $\ell$  presentada en (2.1) y la construcción de  $P$  implican que la longitud de  $P$  es igual al tamaño de  $U$ , que es  $c$ .

Ahora supongamos que  $D_k^t$  tiene un camino dirigido  $P$  de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  de longitud  $c$  y probemos que existe un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$ , de tamaño  $c$ .

Sea  $U$  el conjunto de todos los vértices  $u \in V(G)$  de modo que el intervalo correspondiente a  $u$  está asociado a algún nodo de  $P$ . A continuación, demostramos que  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$  de tamaño  $c$ .

Tengamos en cuenta que dado que ni  $I_0$  y ni  $I_{n+1}$  es un nodo grande,  $(I_0, I_{n+1}) \notin E_1$ ; además,  $(I_0, I_{n+1}) \notin E_0$  ya que la propiedad (2) en la definición de un arco en  $E_0$  no se verifica. Por lo tanto,  $(I_0, I_{n+1}) \notin E(D_k^t)$  y  $P$  tiene al menos 3 nodos.

El conjunto de nodos de  $P$  se puede particionar de manera única en conjuntos consecutivos de nodos, denominados  $W_0, W_1, \dots, W_r, W_{r+1}$ , de modo que cada  $W_i$  es el conjunto de nodos de un sub-camino maximal  $P'$  de  $P$  tal que  $E(P') \subseteq E_1$ . (De manera equivalente, los  $W_i$  son los conjuntos de vértices de las componentes conexas del grafo no dirigido subyacente al dígrafo  $P - E_0$ .) Notar que  $W_0 = \{I_0\}$  y  $W_{r+1} = \{I_{n+1}\}$ .

Para todo  $i \in \{0, 1, \dots, r+1\}$ , sea  $U_i$  el conjunto de vértices de  $G$  correspondiente a los intervalos asociados a los nodos de  $W_i$ .

CAPÍTULO 2.  $K$ -DOMINACIÓN Y  $K$ -DOMINACIÓN TOTAL EN GRAFOS DE INTERVALOS PROPIOS

---

**Lema 30.** Para cada  $0 \leq i < j \leq r + 1$  y para cada par de intervalos  $I \in \mathcal{I}^{U_i}$  y  $J \in \mathcal{I}^{U_j}$  se tiene  $I < J$  y  $I \cap J = \emptyset$ .

*Demostración.* Probemos esto por inducción sobre  $m = j - i$ .

Si  $m = 1$ , entonces sea  $(s, s')$  el único arco de  $P$  que conecta un nodo de  $W_i$  con un nodo de  $W_{i+1}$ . Por la definición de los  $W_i$ , tenemos  $(s, s') \notin E_1$  y, por lo tanto,  $(s, s') \in E_0$ . Esto implica que cada intervalo asociado a  $s$  es menor (con respecto al orden  $<$ ) y disjunto de cada intervalo asociado a  $s'$ . En consecuencia, las definiciones de  $W_i$ ,  $W_{i+1}$ ,  $U_i$ ,  $U_{i+1}$ , y las propiedades de los arcos en  $E_0$  implican que cada intervalo en  $\mathcal{I}^{U_i}$  es menor (con respecto al orden  $<$ ) y disjunto de cada intervalo en  $\mathcal{I}^{U_{i+1}}$ . El paso inductivo se desprende de la transitividad de la relación en  $\mathcal{I}$  en la cual el intervalo  $I$  está en relación con el intervalo  $J$  si y solo si  $I < J$  y  $I \cap J = \emptyset$ .  $\square$

A partir del Lema 30, podemos probar que ninguna arista de  $G$  conecta un vértice en  $U_i$  con un vértice en  $U_j$  cuando  $1 \leq i < j \leq r$ . Más específicamente:

**Lema 31.** Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $G[U_i]$  es una componente conexa de  $G[U]$ .

*Demostración.* Probemos el lema usando las propiedades de los arcos en  $D_k^t$ , de la siguiente manera. Sea  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

- Supongamos primero que  $W_i \cap S \neq \emptyset$ . Como cada arco en  $E_1$  conecta un par de nodos grandes, concluimos que  $W_i = \{s\}$  para algún  $s \in S$ . Usando la propiedad (2) en la definición de un nodo pequeño, se obtiene que  $G[U_i]$  es conexo.

Por lo tanto, como ninguna arista de  $G$  conecta un vértice en  $U_i$  con un vértice en  $U_j$  para  $j \neq i$  (por Lema 30), resulta así que  $G[U_i]$  es una componente conexa de  $G[U]$ , como se afirma.

- Ahora supongamos que  $W_i \cap S = \emptyset$ , es decir,  $W_i \subseteq B$ . Sea  $P'$  el sub-camino de  $P$  tal que  $V(P') = W_i$ . Como  $P'$  consiste solo de nodos grandes y solo de arcos de  $E_1$ , se puede usar la propiedad (1) de la definición de un nodo grande para inferir que  $G[U_i]$  es conexo.

$\square$

El próximo lema implicará que  $|U| = c$ .

**Lema 32.** El tamaño de  $U$  es igual a la longitud de  $P$ .

*Demostración.* Para cada  $i \in \{1, \dots, r + 1\}$ , sea  $P^i$  el sub-camino de  $P$  que consiste en todos los arcos de  $P$  que entran en un nodo de  $W_i$ . Por construcción, los caminos  $P^1, \dots, P^{r+1}$  son disjuntos (por arcos) dos a dos y su unión es  $P$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, r + 1\}$ , se denota con  $\ell_i$  a la longitud de  $P^i$ .

A partir de las definiciones de los  $W_i$  y de la función longitud en (2.1) deducimos que  $\ell_i = \ell(s_i, s'_i) + |W_i| - 1$ , donde  $(s_i, s'_i)$  es el arco (único) de  $P$  tal que  $s_i \notin W_i$  y  $s'_i \in W_i$ . Como  $(s_i, s'_i) \in E_0$ , tenemos

$$\ell(s_i, s'_i) = \begin{cases} |\mathcal{I}_{s'_i}|, & \text{si } i \in \{1, \dots, r\} \\ 0, & \text{si } i = r + 1. \end{cases}$$

Resulta entonces que

$$\ell_i = \begin{cases} |\mathcal{I}_{s'_i}| + |W_i| - 1, & \text{si } i \in \{1, \dots, r\} \\ 0, & \text{si } i = r + 1. \end{cases}$$

Además, tenemos  $|\mathcal{I}_{s'_i}| + |W_i| - 1 = |U_i|$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ , lo que implica  $\ell_i = |U_i|$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Por el Lema 31, el subgrafo de  $G$  inducido por  $U_i$  es una componente conexa de  $G[U]$ , lo que implica  $|U| = \sum_{i=1}^r |U_i| = \sum_{i=1}^{r+1} \ell_i$ . Como  $P^1, \dots, P^{r+1}$  son disjuntos dos a dos por arcos y su unión es  $P$ , la suma  $\sum_{i=1}^{r+1} \ell_i$  es exactamente la longitud de  $P$ . Esto prueba el lema deseado.  $\square$

Queda por demostrar que  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante total de  $G$ , es decir, que cada vértice  $u \in V(G)$  tiene al menos  $k$  vecinos en  $U$ .

**Lema 33.** *Sea  $u \in V(G)$  y sea  $I \in \mathcal{I}$  el intervalo correspondiente a  $u$ . Entonces,  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .*

*Demostración.* Consideremos dos casos, dependiendo si  $u$  es un elemento del conjunto  $U$  o si no lo es.

*Caso 1.*  $u \in U$ .

En este caso,  $I \in \mathcal{I}^U$  e  $I$  está asociado a algún nodo de  $P$ . Sea  $s \in V(P)$  un tal nodo. Notar que  $s \notin \{I_0, I_{n+1}\}$ . Por construcción de  $U$ , se tiene  $\mathcal{I}_s \subseteq \mathcal{I}^U$ .

- Supongamos primero que  $s$  es un nodo pequeño. Luego, la propiedad (3) en la definición de nodo pequeño implica que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_s \setminus \{I\}$ , que es un subconjunto de  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .
- Suponemos ahora que  $s$  es un nodo grande. Existe un único  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $s \in W_i$ . Notemos que  $W_i$  es el conjunto de nodos del sub-camino de  $P$ , digamos  $P'$ , que consiste solo en nodos grandes y arcos en  $E_1$ . Sea  $I_{j_1}, \dots, I_{j_{p_i}}$  los intervalos correspondientes a los vértices en  $U_i$ , ordenados crecientemente. El hecho de que todos los arcos de  $P'$  están en  $E_1$  implica que los conjuntos de nodos y arcos de  $P'$  están dados por  $V(P') = W_i = \{s_q \mid 1 \leq q \leq p_i - 2k + 1\}$  donde  $s_q = (I_{j_q}, \dots, I_{j_{q+2k-1}})$  y  $E(P') = \{(s_q, s_{q+1}) \mid 1 \leq q \leq p_i - 2k\}$ . Además, existe un único índice  $q \in \{1, \dots, p_i\}$  tal que  $I = I_{j_q}$ .

- Consideremos primero que  $q \leq k + 1$ . Sea  $(s', s'')$  el (único) arco de  $P$  tal que  $s' \notin W_i$  y  $s'' \in W_i$ . Como  $(s', s'') \in E_0$  y  $s'' \in B$ , la propiedad (4) de la definición de un arco en  $E_0$  garantiza que los intervalos  $I_{j_1}, \dots, I_{j_{k+1}}$  se intersecan dos a dos. Claramente, ésto implica que el intervalo  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .
- El caso  $p_i - q \leq k$  es análogo al caso  $q \leq k + 1$  y puede ser analizado usando la propiedad (3) de la definición de un arco en  $E_0$ .
- Supongamos ahora que  $k+1 < q < p_i - k$ . Sea  $\alpha = q - k$  y sea  $s_\alpha = (I_{j_\alpha}, \dots, I_{j_{\alpha+2k-1}})$ . Luego  $s_\alpha \in V(P')$  y  $s_\alpha$  es un nodo grande de  $D_k^t$ . Además,  $I_{j_{\alpha+k-1}} = I_{j_{q-1}} < I_{j_q} = I = I_{j_{\alpha+k}}$  y por lo tanto la propiedad (2) en la definición de nodo grande implica que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_{s_\alpha} \setminus \{I\}$ , el cual es un subconjunto de  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .

*Caso 2.  $u \notin U$ .*

En este caso,  $I \notin \mathcal{I}^U$ . Denotamos con  $I^-$  al intervalo más a la derecha en el conjunto  $\{I' \mid I' < I, I' \in \mathcal{I}^U\}$  si existe tal intervalo, sino  $I^- = I_0$ . Similarmente, denotamos por  $I^+$  al intervalo más a la izquierda en el conjunto  $\{I' \mid I < I', I' \in \mathcal{I}^U\}$  si existe tal intervalo, sino  $I^+ = I_{n+1}$ . Observemos que  $I^- < I < I^+$ . Consideremos varios subcasos dependiendo de  $I^-$  y  $I^+$ .

*Caso 2.1.  $I^- = I_0$ .* Sea  $s$  el sucesor de  $I_0$  en  $P$ . Luego,  $(I_0, s) \in E_0$  y como  $I_0 = I^- < I < I^+ = \min(s)$ , la propiedad (2) en la definición de arcos en  $E_0$  implica que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}_{I_0} \cup \mathcal{I}_s$ . Como  $I$  no se interseca con el intervalo  $I_0$ , concluimos que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}_s$ , el cual es un subconjunto de  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .

*Caso 2.2.  $I^+ = I_{n+1}$ .* Este caso es análogo al caso 2.1.

*Caso 2.3.  $I_0 < I^- < I^+ < I_{n+1}$  y  $I^- \cap I^+ = \emptyset$ .* En este caso, existe un único  $i \in \{1, \dots, r-1\}$  tal que  $I^-$  está asociado a un nodo en  $W_i$  e  $I^+$  está asociado a un nodo en  $W_{i+1}$ . Sea  $(s', s'')$  el (único) arco de  $P$  tal que  $s' \in W_i$  y  $s'' \in W_{i+1}$ . Luego  $(s', s'') \in E_0$  y como  $\max(s') = I^- < I < I^+ = \min(s'')$ , la propiedad (2) en la definición de arcos en  $E_0$  implica que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}_{s'} \cup \mathcal{I}_{s''}$ , el cual es un subconjunto de  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .

*Caso 2.4.  $I_0 < I^- < I^+ < I_{n+1}$  y  $I^- \cap I^+ \neq \emptyset$ .* En este caso, existe un único  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que tanto  $I^-$  como  $I^+$  están asociados a un nodo en  $W_i$ . Además, como  $I^-$  y  $I^+$  son intervalos consecutivos en  $\mathcal{I}^U$ , existe un nodo  $s \in W_i$  tal que ambos  $I^-$  y  $I^+$  están asociados a  $s$ . Esto es claramente cierto si  $W_i$  consiste en un solo nodo. Si  $W_i$  tiene más de un nodo, entonces estos son nodos grandes. El hecho de que todos los arcos de  $P$  que conectan dos nodos en  $W_i$  están en  $E_1$  implica que podemos obtener un nodo  $s$  con la propiedad deseada, definiendo a  $s$  como el nodo en  $W_i$  más cercano a  $I_{n+1}$  (a lo largo de  $P$ ) de modo que el intervalo  $I^-$  este asociado a  $s$ .

*Caso 2.4.1.*  $s \in S$ . En este caso, tenemos  $\min(s) \leq I^- < I < I^+ \leq \max(s)$  y la propiedad (3) en la definición de nodo pequeño implica que el intervalo  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_s \setminus \{I\}$ , el cual es un subconjunto de  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .

*Caso 2.4.2.*  $s \in B$ . En este caso,  $W_i$  es el conjunto de nodos de un sub-camino de  $P$  que consiste solo en nodos grandes. Sean  $I_{j_1}, \dots, I_{j_{p_i}}$  los intervalos correspondientes a los vértices de  $U_i$ , ordenados crecientemente. Existe un índice único  $q \in \{1, \dots, p_i - 1\}$  tal que  $I^- = I_{j_q}$  y  $I^+ = I_{j_{q+1}}$ .

- Supongamos primero que  $q < k$ . Sea  $(s', s'')$  el (único) arco de  $P$  tal que  $s' \notin W_i$  y  $s'' \in W_i$ . Luego  $(s', s'') \in E_0$  y  $s'' \in B$ , por lo tanto la propiedad (4) en la definición de arcos en  $E_0$  garantiza que los intervalos  $I_{j_1}, \dots, I_{j_{k+1}}$  se intersecan dos a dos. Esta condición implica que el intervalo  $I$  interseca a cada uno de los intervalos  $I_{j_1}, \dots, I_{j_{k+1}}$ , y por lo tanto también a al menos  $k + 1$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .
- El caso  $p_i - q < k$  es análogo al caso  $q < k$  y puede ser analizado usando la propiedad (3) en la definición de arcos en  $E_0$ .
- Supongamos ahora que  $k \leq q \leq p_i - k$ . Sea  $\alpha = q - k + 1$  y sea  $s_\alpha = (I_{j_\alpha}, I_{j_{\alpha+1}}, \dots, I_{j_{\alpha+2k-1}})$ . Con un argumento similar al Caso 1 obtenemos que  $s_\alpha \in W_i$  y  $s_\alpha$  es un nodo grande de  $D_k^t$ . Además,  $I_{j_{\alpha+k-1}} = I_{j_q} = I^- < I < I^+ = I_{j_{q+1}} = I_{j_{\alpha+k}}$ . Por lo tanto, la propiedad (2) en la definición de nodo grande implica que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_{s_\alpha}$ , el cual es un subconjunto de  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\}$ .

□

Esto muestra que  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante total en  $G$  y se completa la prueba de la Proposición 25.

El digrafo  $D_k^t$  tiene  $\mathcal{O}(n^{2k})$  nodos y  $\mathcal{O}(n^{4k})$  arcos y puede ser, junto con la función de longitud  $\ell$  en sus arcos, calculado a partir de  $G$  directamente desde la definición en el tiempo  $\mathcal{O}(n^{4k+1})$ .

Un camino dirigido más corto (con respecto a  $\ell$ ) desde  $I_0$  a todos los nodos accesibles desde  $I_0$  en  $D_k^t$  se puede calcular en tiempo polinomial en el tamaño del orden,  $n$ , del grafo usando cualquiera de los enfoques estándares, por ejemplo usando Algoritmo de Dijkstra. En realidad, dado que  $D_k^t$  es acíclico, se puede usar un enfoque de programación dinámica junto con un orden topológico en  $D_k^t$  para calcular los caminos más cortos desde  $I_0$  en tiempo lineal (en el tamaño de  $D_k^t$ ). La Proposición 25 implica, por lo tanto, que el problema de  $k$ -dominación total se puede resolver en tiempo  $\mathcal{O}(n^{4k+1})$  en la clase de grafos de intervalos propios de  $n$  vértices. Es decir, podemos concluir que:

**Teorema 34.** *Para cada entero positivo  $k$ , el problema de la  $k$ -dominación total es resoluble en el tiempo de  $\mathcal{O}(|V(G)|^{4k+1})$  en la clase de grafos de intervalos propios.*

### 2.3. Modificación del enfoque para $k$ -dominación

Con modificaciones menores en las definiciones de nodos pequeños, nodos grandes y arcos en  $E_0$  del digrafo, el enfoque desarrollado en la Sección 2.2 para el problema de la  $k$ -dominación total conduce a un resultado análogo para el problema de la  $k$ -dominación. En términos generales, las diferencias son las siguientes:

1. En la definición de nodos pequeños, en la propiedad (1)  $q$  varía de 1 a  $2k - 1$  en lugar de  $k + 1$  a  $2k - 1$ .
2. En la definición de nodos pequeños, en la propiedad (3) la propiedad de intersección se requiere solo para intervalos  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_s$  (y así las desigualdades con respecto a la posición de  $I$  pueden volverse estrictas).
3. Se necesita un cambio similar en la definición de nodos grandes, propiedad (3).
4. En la definición de arcos en  $E_0$ , las propiedades (3) y (4) cambian. (La formulación exacta se indica a continuación).

El cambio detallado en el primer ítem se debe al hecho de que el análogo del Lema 24 falla para conjunto  $k$ -dominantes. Los cambios descritos en los restantes ítems se derivan del hecho de que, a diferencia de un conjunto  $k$ -dominante total, un conjunto  $k$ -dominante sólo tiene que dominar los vértices que no están en el conjunto.

La incorporación de los cambios necesarios conduce a la siguiente definición del digrafo acíclico ponderado por arco  $D_k$ :

- El conjunto  $S$  de nodos pequeños ahora consiste exactamente en esas secuencias crecientes  $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_q})$  de intervalos de  $\mathcal{I}$  tal que:
  1.  $1 \leq q \leq 2k - 1$ ,
  2.  $I_{i_j} \cap I_{i_{j+1}} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, q - 1\}$ , y
  3. cada intervalo  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_s$  tal que  $\min(s) < I < \max(s)$  interseca a al menos a  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_s$ .
- El conjunto  $B$  de nodos grandes consiste exactamente en aquellas secuencias crecientes  $s = (I_{i_1}, \dots, I_{i_{2k}})$  de intervalos de  $\mathcal{I}$  de longitud  $2k$  tal que:
  1.  $I_{i_j} \cap I_{i_{j+1}} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, 2k - 1\}$  y
  2. cada intervalo  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_s$  tal que  $I_{i_k} < I < I_{i_{k+1}}$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_s$ .
- El conjunto  $E_0$  consiste en aquellos pares ordenados  $(s, s') \in V(D_k) \times V(D_k)$  tal que:

1.  $\max(s) < \min(s')$  y  $\max(s) \cap \min(s') = \emptyset$ ,
  2. cada intervalo  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $\max(s) < I < \min(s')$  interseca a al menos a  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}_s \cup \mathcal{I}_{s'}$ ,
  3. si  $s = (I_{j_1}, \dots, I_{j_{2k}})$  es un nodo grande, luego cada intervalo  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_s$  tal que  $I_{j_{k+1}} < I < I_{j_{2k}}$  interseca a al menos  $k$  intervalos en  $\mathcal{I}_s$ , y
  4. si  $s' = (I_{j_1}, \dots, I_{j_{2k}})$  es un nodo grande, luego cada intervalo  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_{s'}$  tal que  $I_{j_1} < I < I_{j_k}$  interseca a al menos  $k$  intervalos en  $\mathcal{I}_{s'}$ .
- El conjunto  $E_1$  consiste en aquellos pares ordenados  $(s, s') \in V(D_k) \times V(D_k)$  tal que  $s, s' \in B$  y existen  $2k + 1$  intervalos  $I_{i_1}, \dots, I_{i_{2k+1}}$  en  $\mathcal{I}$  tal que  $s = (I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{2k}})$  y  $s' = (I_{i_2}, I_{i_3}, \dots, I_{i_{2k+1}})$ .
  - La función longitud  $\ell(s, s')$  sobre los arcos  $(s, s')$  de  $D_k$  se definen de acuerdo a (2.1).

Las adaptaciones adecuadas de los argumentos utilizados en la prueba de la Proposición 25 permiten obtener el siguiente resultado.

**Proposición 35.** *Dado un grafo de intervalos propios  $G$  y un entero positivo  $k$ , sea  $D_k$  el digrafo construido como arriba. Luego  $G$  tiene un conjunto  $k$ -dominante de tamaño  $c$  si y solo si  $D_k$  tiene un camino dirigido de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  de longitud  $c$ .*

*Demostración.* Sea  $U$  un conjunto  $k$ -dominante en  $G$  de tamaño  $c$ . Para probar que  $D_k$  tiene un camino dirigido de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  de longitud  $c$ , la clave es considerar nuevamente las componentes conexas de  $G[U]$ , ordenadas naturalmente de izquierda a derecha, y asociarle a cada componente conexa un camino en  $D_k$  definido como una secuencia de nodos. Los análogos de los Lemas 27 y 28 se verifican y el camino dirigido deseado  $P$  de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  en  $D_k$  se obtendrá combinando estos caminos en un secuencia única de nodos precedida por  $I_0$  y seguida por  $I_{n+1}$ .

A continuación, probamos que  $P$  es un camino en  $D_k$ , es decir, que dos nodos consecutivos de  $P$  forman un arco en  $D_k$ . Consideramos un par  $s, s'$  de nodos consecutivos de  $P$ . La prueba de que  $(s, s')$  es un arco de  $D_k$  puede obtenerse siguiendo los mismos argumentos que los utilizados en la prueba del Lema 29, excepto para la verificación de la propiedad (4) en la definición de arcos en  $E_0$  en los casos en que  $s \in \{I_0\} \cup S$ . Esto puede hacerse de la siguiente manera.

- Supongamos primero que  $s = I_0$ . Sea  $s' \in B$ ,  $s' = (I_{j_1}, \dots, I_{j_{2k}})$ , y consideramos el intervalo  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_{s'}$  tal que  $I_{j_1} < I < I_{j_k}$ . Veamos que  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^U$ . Para eso, supongamos que este no es el caso. La construcción de  $P$  implica que  $\mathcal{I}_{s'}$  consiste en los  $2k$  intervalos más a la izquierda correspondientes a vértices en  $U$ . En particular, si  $I \in \mathcal{I}^U$ , entonces la condición  $I_{j_1} < I < I_{j_k}$  implica que  $I = I_{j_\alpha}$  para algún  $1 < \alpha < k$ , por lo tanto  $I \in \mathcal{I}_{s'}$ , lo que es una contradicción. Como  $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^U$  y  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante en  $G$ , el intervalo  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}^U$ . Nuevamente,

ya que  $I_{j_1}, \dots, I_{j_{2k}}$  son los  $2k$  intervalos más a la izquierda correspondientes a vértices en  $\mathcal{I}^U$  y  $I < I_{j_k}$ , el hecho de que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}^U$  implica que  $I$  también interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\{I_{j_1}, \dots, I_{j_{2k-1}}\}$ , el cual es un subconjunto de  $\mathcal{I}_{s'}$ . Esto establece la propiedad (4) en el caso  $s = I_0$ .

- Supongamos ahora que  $s \in S$ . Aquí, la propiedad (4) se puede establecer usando un argumento similar al del caso  $s = I_0$ , esta vez se utiliza el hecho de que si  $s' \in B$ , entonces  $\mathcal{I}_{s'}$  consiste en los  $2k$  intervalos más a la izquierda en  $\mathcal{I}^{C_i}$  donde  $C_i$  es la componente conexa de  $G[U]$  que contiene los vértices correspondientes a los intervalos asociados a  $s'$ .

Esto muestra que  $P$  es un camino dirigido desde  $I_0$  a  $I_{n+1}$  en  $D_k$ . Además, la construcción de  $P$  implica que la longitud de  $P$  es igual al tamaño de  $U$ , que es  $c$ .

Ahora supongamos que  $D_k$  tiene un camino dirigido  $P$  de  $I_0$  a  $I_{n+1}$  de longitud  $c$  y probemos que existe un conjunto  $k$ -dominante de tamaño  $c$  en  $G$ . De manera similar, como en la prueba de la Proposición 25, sea  $U$  el conjunto de todos los vértices  $u \in V(G)$  tal que el intervalo correspondiente a  $u$  esta asociado a algún nodo de  $P$ . Tenemos que demostrar que  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante en  $G$  de tamaño  $c$ .

Análogamente a lo hecho en la Proposición 25, el conjunto de nodos de  $P$  puede particionarse en conjuntos  $W_i$ . Además, los subconjuntos  $U_i$  de vértices de  $G$  podemos definirlos como antes. No es difícil ver que los análogos a los Lemas 30, 31, y 32 se mantienen.

Queda por demostrar que  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante en  $G$ , es decir, que cada vértice  $u \in V(G) \setminus U$  tiene al menos  $k$  vecinos en  $U$ . Sea  $u \in V(G) \setminus U$  y sea  $I \in \mathcal{I}$  el intervalo correspondiente a  $u$ . Necesitamos probar que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}^U$ . Notemos que  $I \notin \mathcal{I}^U$ , así  $\mathcal{I}^U \setminus \{I\} = \mathcal{I}^U$ . La prueba que  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}^U$  puede obtenerse siguiendo los mismos argumentos que los utilizados en el Caso 2 de la prueba del Lema 33, excepto para el caso cuando  $I_0 < I^- < I^+ < I_{n+1}$  y  $I^- \cap I^+ \neq \emptyset$  (correspondiente al Caso 2.4 de la prueba del Lema 33). En este caso, se necesitan algunas modificaciones para los dos subcasos dependiendo de si  $s \in S$  o  $s \in B$ . Los argumentos correspondientes son los siguientes.

- Si  $s \in S$ , luego la propiedad (3) en la definición de un nodo pequeño implica que el intervalo  $I$  interseca a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_s$ , el cual es un subconjunto de  $\mathcal{I}^U$ .
- Supongamos a continuación que  $s \in B$ . Luego  $W_i$  es el conjunto de nodos de un subcamino de  $P$ , digamos  $P'$ , que consta solo de nodos grandes. Sean  $I_{j_1}, \dots, I_{j_{p_i}}$  los intervalos correspondientes a los vértices en  $U_i$ , ordenados crecientemente. El hecho de que todos los arcos de  $P'$  estén en  $E_1$  implica que  $V(P') = W_i = \{s_q \mid 1 \leq q \leq p_i - 2k + 1\}$  donde  $s_q = (I_{j_q}, \dots, I_{j_{q+2k-1}})$  y  $E(P') = \{(s_q, s_{q+1}) \mid 1 \leq q \leq p_i - 2k\}$ . Además, existe un único índice  $q \in \{1, \dots, p_i - 1\}$  tal que  $I^- = I_{j_q}$  y  $I^+ = I_{j_{q+1}}$ .

- Supongamos primero que  $q < k$ . Sea  $(s', s'')$  el arco (único) de  $P$  tal que  $s' \notin W_i$  y  $s'' \in W_i$ . Entonces  $(s', s'') \in E_0$  y  $s'' \in B$ , y  $I_{j_1} < I < I_{j_k}$ . Por lo tanto, la propiedad (4) en la definición de un arco en  $E_0$  garantiza que el intervalo  $I$  intersecta a al menos  $k$  intervalos de  $\mathcal{I}_{s''}$ , y por lo tanto también a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}^U$ .
- El caso  $p_i - q < k$  es análogo al caso  $q < k$  y puede analizarse usando la propiedad (3) en la definición de un arco en  $E_0$ .
- Supongamos ahora que  $k \leq q \leq p_i - k$ . Sea  $\alpha = q - k + 1$  y sea  $s_\alpha = (I_{j_\alpha}, I_{j_{\alpha+1}}, \dots, I_{j_{\alpha+2k-1}})$ . Luego  $s_\alpha \in V(P')$  y  $s_\alpha$  es un nodo grande de  $D_k$ . Además  $I_{j_{\alpha+k-1}} = I_{j_\alpha} = I^- < I < I^+ = I_{j_{q+1}} = I_{j_{\alpha+k}}$ . Por lo tanto, la propiedad (2) en la definición de un nodo grande implica que  $I$  intersecta a al menos  $k$  intervalos del conjunto  $\mathcal{I}_{s_\alpha}$ , el cual es un subconjunto de  $\mathcal{I}^U$ .

Esto muestra que  $U$  es un conjunto  $k$ -dominante en  $G$  y completamos así la prueba.  $\square$

**Teorema 36.** *Para cada entero positivo  $k$ , el problema de  $k$ -dominación se puede resolver en el tiempo de  $\mathcal{O}(|V(G)|^{4k+1})$  en la clase de grafos de intervalos propios.*

*Demostración.* El digrafo  $D_k$  tiene  $\mathcal{O}(n^{2k})$  nodos y  $\mathcal{O}(n^{4k})$  arcos y puede ser, junto con la función de longitud  $\ell$  en sus arcos, calculados a partir de  $G$  directamente desde la definición en el tiempo  $\mathcal{O}(n^{4k+1})$ . Por lo tanto, la Proposición 35 implica que el problema de  $k$ -dominación se puede resolver en tiempo  $\mathcal{O}(n^{4k+1})$  en la clase de grafos de intervalos propios de  $n$  vértices.  $\square$

## 2.4. Los problemas ponderados

El enfoque de Bui-Xuan et al. [12] junto con el de Belmonte et al. [5] implica que el problema de la  $k$ -dominación y el de la  $k$ -dominación total se pueden resolver en el tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^{3k+4})$  en la clase de grafos de intervalos, como se explicó en la Sección 2.1. También ese enfoque funciona para las siguientes versiones ponderadas de los problemas:

- Dado un grafo  $G$  donde cada vértice  $u \in V(G)$  tiene asociado un costo no negativo  $c(u)$ , el *problema de la  $k$ -dominación total ponderada* (*problema de la  $k$ -dominación ponderada*) consiste en encontrar un conjunto  $k$ -dominante total ( $k$ -dominante)  $U$  en  $G$  de costo total mínimo. El costo total de un conjunto  $U \subseteq V(G)$  lo denotamos por  $c(U)$  y está definido como  $c(U) = \sum_{v \in U} c(v)$ .

Para ambas familias de problemas, nuestro enfoque también se puede adaptar fácilmente al caso ponderado. Dado un grafo de intervalos propios, denotamos el costo total de un conjunto  $\mathcal{J}$  de vértices (es decir, intervalos) por  $c(\mathcal{J}) = \sum_{I \in \mathcal{J}} c(I)$ , es suficiente generalizar la función de longitud de (2.1) de manera directa, de la siguiente manera:

$$\ell(s, s') = \begin{cases} c(\mathcal{I}_{s'}), & \text{si } (s, s') \in E_0 \text{ y } s' \neq I_{n+1}; \\ c(\text{mín}(s')), & \text{si } (s, s') \in E_1; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Excepto por este cambio, los algoritmos son los mismos que para las versiones no ponderadas, y la prueba de validez puede adaptarse fácilmente. Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado algorítmico.

**Teorema 37.** *Para cada entero positivo  $k$ , los problemas de  $k$ -dominación ponderado y  $k$ -dominación total ponderado se pueden resolver en el tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^{4k+1})$  en la clase de los grafos de intervalos propios.*

Con una cuidadosa implementación de los algoritmos desarrollados en este capítulo, implementación que no se mostrará en esta tesis pero que se puede consultar también en [20], trabajo en el cual además se encuentra publicado los resultados expuestos en este capítulo, se puede calcular un camino desde  $I_0$  a  $I_{n+1}$  de longitud mínima en  $D_k^t$  sin examinar todos los arcos del digrafo, conduciéndonos así a resolver los problemas (en todas sus versiones) en un tiempo de ejecución  $\mathcal{O}(n^{3k})$  que claramente mejora para todo valor de  $k$  el tiempo de ejecución de todos los algoritmos presentados en este capítulo, como así también el tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^{3k+4})$  derivado del enfoque de Bui-Xuan et al. [12] y Belmonte et al. [5].

## Capítulo 3

### $k$ -upla dominación en grafos co-biconvexos

## Resumen

En este capítulo se estudia la  $k$ -upla dominación en la clase de los grafos co-biconvexos. Éstos constituyen la subclase de grafos arco-circulares cuyas matrices de adyacencia ampliada tienen la propiedad de los 0's consecutivos por columnas. Los resultados obtenidos permiten resolver de manera eficiente el problema de la  $k$ -upla dominación en cualquier grafo co-biconvexo para todos los valores de  $k$  que satisfacen  $2 \leq k \leq |\mathcal{U}| + 3$ , donde  $\mathcal{U}$  es el conjunto de vértices universales del grafo dado.

Los resultados que se presentan en este capítulo fueron publicados en [30].

### 3.1. Propiedades sobre 0's y 1's consecutivos en matrices 0, 1

Una matriz 0, 1 tiene la *propiedad de los 0's consecutivos* (C0P) por columnas si existe una permutación de sus filas que posiciona los 0's consecutivamente en cada columna. Esta propiedad fue presentada por Tucker en [75]. Similarmente está definida la *propiedad de los 1's consecutivos* (C1P) por columnas [35].

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3.1: Matriz con la propiedad C0P por columnas.

A modo de ejemplo, la matriz  $A$  que se muestra en la Figura 3.1 tiene la propiedad C0P por columnas. Notar que en esa matriz, los 0's no aparecen consecutivamente en cada columna pero existe una permutación de sus filas que hace posible obtener la matriz  $A'$  que se encuentra a su derecha, y en la cual los 0's están ubicados consecutivamente en cada columna. Si se denota con  $f_i$  a la fila  $i$ -ésima de la matriz  $A$  y con  $f'_i$ , a la fila  $i$ -ésima de  $A'$  para  $i = 1, \dots, 5$ , la permutación realizada para obtener los 0's consecutivamente en cada columna es:

$$\begin{aligned} f_1 &\leftrightarrow f'_3 \\ f_2 &\leftrightarrow f'_5 \\ f_3 &\leftrightarrow f'_2 \\ f_4 &\leftrightarrow f'_4 \\ f_5 &\leftrightarrow f'_1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Observar que si consideramos la matriz  $B$  obtenida a partir de  $A$  al intercambiar 0's por 1's y, reciprocamente, 1's por 0's (ver Figura 3.2),  $B$  tiene la propiedad C1P por columnas ya que es posible reordenar sus filas de modo de obtener la matriz  $B'$  en la cual sus 1's aparecen consecutivamente en cada columna. En este caso, si con  $f_i$  denotamos la fila  $i$ -ésima de  $B$  y con  $f'_i$ , la fila  $i$ -ésima de  $B'$  para  $i = 1, \dots, 5$ , el reordenamiento realizado para obtener los 1's consecutivamente en cada columna, claramente, es el mismo que el indicado en (3.1).

**Observación 38.** Dada  $A$  una matriz 0, 1, se considera la matriz  $B$  que se obtiene a partir de  $A$ , intercambiando los 1's por 0's y los 0's por 1's. Es claro que  $A$  tiene la propiedad C0P si y solo si  $B$  tiene la propiedad C1P.

Un ejemplo de dicho intercambio se puede ver precisamente en las Figuras 3.1 y 3.2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.2: Matriz con la propiedad C1P por columnas.

En 1965, Fulkerson y Gross [35] presentaron un algoritmo de orden  $O(mn^2)$  que comprueba si una matriz  $0, 1$  de tamaño  $m \times n$  tiene la propiedad C1P por columnas y, en caso de tener tal propiedad, dicho algoritmo permite obtener una permutación de sus filas con la cual los 1's quedan consecutivamente en cada columna. Más de una década después, en 1976, Booth y Lueker [9] mejoraron este resultado presentando un algoritmo que permite resolver ese problema en tiempo  $O(m + n + o)$ , donde  $m$ ,  $n$  y  $o$  son los números de filas, columnas y unos respectivamente de la matriz dada. Observemos que para una matriz cuadrada densa, este tiempo es a lo sumo  $O(n^2)$ .

Por lo mencionado en la Observación 38 y dado que  $O(n^2)$  también es suficiente para intercambiar las entradas de 1's por 0's y las de 0's por 1's en una matriz de tamaño  $n \times n$ , resulta que se tiene un algoritmo eficiente para decidir si una determinada matriz cuadrada tiene la propiedad C0P por columnas.

La Figura 3.3 muestra un grafo arco-circular  $G$  y un modelo para él donde su matriz de adyacencia ampliada  $A^*(G)$  — mostrada en la Figura 3.4 — tiene la propiedad C0P por columnas.

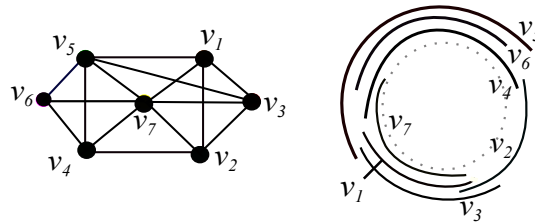


Figura 3.3: Un grafo arco-circular  $G$  y un modelo arco-circular para él.

$$A^*(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3.4: Matriz de adyacencia ampliada con la propiedad C0P por columnas para el grafo  $G$  de la Figura 3.3.

La matriz  $A^*(G)$  de la Figura 3.4 efectivamente tiene la propiedad C0P por columnas ya que si se realiza, por ejemplo, el siguiente reordenamiento de sus filas:

$$\begin{aligned} f_1 &\leftrightarrow f'_6 \\ f_2 &\leftrightarrow f'_4 \\ f_3 &\leftrightarrow f'_5 \\ f_4 &\leftrightarrow f'_1 \\ f_5 &\leftrightarrow f'_3 \\ f_6 &\leftrightarrow f'_2 \\ f_7 &\leftrightarrow f'_7, \end{aligned} \tag{3.2}$$

se logra ubicar los ceros consecutivamente por columnas y obtener la matriz que se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3.5: Matriz que se obtiene a partir de  $A^*(G)$  (Fig. 3.4) al realizar la permutación indicada en (3.2).

Tucker demostró el siguiente resultado respecto a los grafos  $G$  cuya matriz de adyacencia ampliada,  $A^*(G)$ , tiene la propiedad C0P por columnas:

**Teorema 39** (Tucker [75]). *Sea  $G$  un grafo, si  $A^*(G)$  tiene la propiedad COP por columnas entonces  $G$  es un grafo arco-circular.*

### 3.2. Conjuntos $k$ -upla dominantes en grafos con vértices universales

De la definición de conjunto  $k$ -upla dominante en un grafo  $G$ , está claro que  $\gamma_{\times k}(G) \geq k$  para todo grafo  $G$  y entero positivo  $k$ .

Dado  $k$ , en el siguiente resultado demostramos que si  $G$  tiene al menos  $k$  vértices universales entonces una mínima  $k$ -upla dominante en  $G$  tiene exactamente  $k$  elementos, y recíprocamente.

**Lema 40.** *Sea  $G$  un grafo,  $\mathcal{U}$  el conjunto de los vértices universales de  $G$  y  $k$  un entero positivo. Entonces  $\gamma_{\times k}(G) = k$  si y solo si  $|\mathcal{U}| \geq k$ .*

*Demostración.* Comencemos probando que  $\gamma_{\times k}(G) = k$  es condición suficiente de  $|\mathcal{U}| \geq k$ . Como  $\gamma_{\times k}(G) = k$ , existe un conjunto  $k$ -upla dominante  $D$  en  $G$  tal que  $|D| = k$ . Luego para  $v \in V(G)$  se tiene que  $|N[v] \cap D| \geq k$ , y como  $D$  tiene exactamente  $k$  elementos, se tiene que  $v$  es adyacente a todo vértice  $u \in D$ . Resulta así que los elementos del conjunto  $D$  son vértices universales y por lo tanto  $|\mathcal{U}| \geq k$ .

Para ver que  $\gamma_{\times k}(G) = k$  es condición necesaria de  $|\mathcal{U}| \geq k$ , consideremos el conjunto  $D = \{x_1, \dots, x_k\}$  donde  $x_i \in \mathcal{U}$  para todo  $i = 1, \dots, k$ ; es decir  $D \subseteq \mathcal{U}$  y  $|D| = k$ . Como los elementos de  $D$  son vértices universales se verifica claramente  $|N[v] \cap D| \geq k, \forall v \in V(G)$ . Luego  $D$  es un conjunto  $k$ -upla dominante y así tenemos que  $\gamma_{\times k}(G) \leq k$ . La desigualdad  $\gamma_{\times k}(G) \geq k$  se desprende de la definición de conjunto  $k$ -upla dominante como se detalló más arriba.

□

Observemos que, si  $u$  es un vértice universal de un grafo  $G$  y  $D$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  con  $u \notin D$ , entonces intercambiando  $u$  con cualquier otro vértice  $v$  de  $D$  ( $(D \cup \{u\}) - v$ ), se obtiene otro conjunto  $k$ -upla dominante que contiene a  $u$ . Formalmente,

**Lema 41.** *Sea  $G$  un grafo,  $u$  un vértice universal de  $G$  y  $D$  un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  tal que  $u \notin D$ . Entonces existe otro conjunto  $k$ -upla dominante  $D'$  en  $G$  tal que  $|D'| = |D|$  y  $u \in D'$ .*

Del lema anterior, es sencillo demostrar la siguiente relación:

**Lema 42.** *Sea  $G$  un grafo,  $u$  un vértice universal de  $G$  y  $k$  un entero positivo. Entonces*

$$\gamma_{\times k}(G) = \gamma_{\times(k-1)}(G - u) + 1.$$

*Demostración.* Sea  $D$  un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  con  $|D| = \gamma_{\times k}(G)$ .

Si  $u \in D$ , entonces  $D - u$  es un conjunto  $(k - 1)$ -upla dominante en  $G - u$ , por lo tanto  $\gamma_{\times(k-1)}(G - u) + 1 \leq |D| = \gamma_{\times k}(G)$ . Si  $u \notin D$ , a partir del Lema 41 podemos construir un conjunto  $k$ -upla dominante  $D'$  en  $G$  que contiene a  $u$  y tal que  $|D'| = \gamma_{\times k}(G)$  y proceder como se indica arriba con  $D'$  en lugar de  $D$ .

Por otro lado, sea  $D$  un conjunto  $(k - 1)$ -upla dominante en  $G - u$  de menor tamaño. Está claro que  $D \cup \{u\}$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  ya que  $u$  es un vértice universal.

Luego  $\gamma_{\times k}(G) \leq |D \cup \{u\}| = |D| + 1 = \gamma_{\times(k-1)}(G - u) + 1$ , y la prueba queda completa.  $\square$

El lema anterior podemos generalizarlo de la siguiente manera:

**Proposición 43.** *Sea  $G$  un grafo,  $\mathcal{U}$  el conjunto de vértices universales de  $G$  y  $k$  un entero positivo con  $|\mathcal{U}| \leq k$ . Entonces*

$$\gamma_{\times k}(G) = \gamma_{\times(k-|\mathcal{U}|)}(G - \mathcal{U}) + |\mathcal{U}|.$$

El siguiente corolario es claro del Lemma 40 y de la Proposición 43.

**Corolario 44.** *Sea  $G$  un grafo y  $\mathcal{U}$  el conjunto de los vértices universales de  $G$  con  $\mathcal{U} \neq \emptyset$ . Si  $\gamma_{\times i}(G - \mathcal{U})$  se puede encontrar en tiempo polinomial para  $i = 1, \dots, r$  para algún  $r \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $\gamma_{\times k}(G)$  se puede hallar también en tiempo polinomial para cada  $k$  con  $1 \leq k \leq |\mathcal{U}| + r$ .*

Es sabido que  $\gamma_{\times 1}(G - \mathcal{U})$  puede hallarse en tiempo polinomial en función del tamaño de  $G$  cuando  $G$  es un grafo co-biconvexo [14], por ser  $G$  en particular un grafo arco-circular [75]. Mostraremos en las secciones siguientes cómo podemos obtener eficientemente  $\gamma_i(G - \mathcal{U})$  para  $i = 2, 3$  en los grafos co-biconvexos. Para eso, presentamos en la siguiente sección algunas propiedades que verifican estos grafos.

### 3.3. Grafos co-biconvexos. Algunas propiedades

En [76] Tucker caracterizó a los grafos cuya matriz de adyacencia ampliada tiene la propiedad COP por columnas como aquellos grafos que son el complemento de un grafo bipartito (o co-bipartitos) y además los 1's de sus matrices de adyacencia ampliada se disponen de manera circular en cada columna. En efecto,

**Teorema 45** (Tucker [76]).  *$G$  es un grafo concave-round y co-bipartito si y sólo si  $A^*(G)$  tiene la propiedad COP por columnas.*

En un trabajo reciente se enuncian las caracterizaciones de Tucker de los grafos co-biconvexos usando terminología actual [72].

Un ejemplo de un grafo arco-circular que no es co-biconvexo es el ciclo  $C_5$ . Notemos que no existe una permutación de las filas de  $A^*(C_5)$  de modo que los 0's queden posicionados

consecutivamente en cada columna y por lo tanto  $A^*(C_5)$  no tiene la propiedad COP por columnas (ver Figuras 3.6 y 3.7).



Figura 3.6:  $C_5$  no es un grafo co-biconvexo

$$A^*(C_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3.7: Matriz de adyacencia ampliada del ciclo  $C_5$ .

En este trabajo, para abocarnos al estudio de los problemas de la  $k$ -upla dominación en grafos co-biconvexos, utilizamos fuertemente la propiedad COP, y por ello adoptamos como definición la siguiente:

**Definición 46** (Tucker [76] y Safe [72]).  *$G$  es un grafo co-biconvexo si su matriz de adyacencia ampliada tiene la propiedad COP por columnas.*

**Observación 47.** *La definición anterior se obtiene del hecho que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $A^*(G)$  tiene la propiedad COP por columnas.
- (ii)  $A^*(co - G)$  tiene la propiedad de los 1's consecutivos por columnas.
- (iii)  $G$  es co-bipartito y concave-round.
- (iv)  $co - G$  es biconvexo.
- (v)  $G$  es co-biconvexo.

En efecto,  $(i) \Leftrightarrow (ii)$  es claro,  $(iv) \Leftrightarrow (v)$  es simplemente por definición, y la equivalencia entre  $(ii)$ ,  $(iii)$  y  $(iv)$  se obtiene de [76] y [72].

A continuación enunciamos las primeras observaciones relativas a la clase de grafos co-biconvexos.

**Observación 48.**

- Por el Teorema 39, los grafos co-biconvexos son grafos arco-circulares.
- La clase de los grafos co-biconvexos es una subclase propia de la clase de los grafos arco-circulares ya que, por ejemplo, el ciclo  $C_5$  es un grafo arco-circular y no es co-biconvexo.
- Recordemos que una propiedad en grafos es hereditaria cuando se verifica que si un grafo tiene la propiedad, cualquier subgrafo inducido de él también la tiene. La propiedad COP por columnas es una propiedad hereditaria. En efecto, dado un grafo  $G$  co-biconvexo, no es difícil ver que todo subgrafo de  $G$  inducido por un subconjunto de vértices es co-biconvexo:

Sea  $R \subseteq V(G)$  y  $A'$  la matriz que se obtiene a partir de  $A^*(G)$  permutando, en caso de ser necesario, sus filas para que los 0's queden posicionados consecutivamente en cada columna. Resulta que  $A^*(G[R])$  también tiene dicha propiedad ya que realizando la misma permutación de filas que se hizo en  $A^*(G)$  para obtener  $A'$  se obtiene la submatriz de  $A'$  luego de eliminar en  $A'$  las filas y las columnas asociadas a los vértices de  $V(G) - R$ . Dicha submatriz tendrá así los 0's ubicados de manera consecutiva en cada columna, es decir  $A^*(G[R])$  tiene la propiedad COP por columnas, o lo que es lo mismo,  $G[R]$  es un grafo co-biconvexo.

- A partir de que la propiedad COP es hereditaria y del hecho que  $C_5$  no es un grafo co-biconvexo, resulta que los grafos co-biconvexos no tienen a un  $C_5$  como subgrafo inducido. Más aún, se puede comprobar que todo  $C_n$  con  $n \geq 5$  no es co-biconvexo y luego los grafos co-biconvexos no pueden tener a un ciclo  $C_n$  como subgrafo inducido, para ningún  $n$  mayor o igual a 5.
- En particular, si  $G$  es un grafo co-biconvexo entonces  $G - \mathcal{U}$  es un grafo co-biconvexo, donde  $\mathcal{U}$  es el conjunto de vértices universales de  $G$ .
- La clase de los grafos co-biconvexos es cerrada bajo el agregado de vértices universales y de gemelos verdaderos (dos vértices  $u$  y  $v$  son gemelos en un grafo  $G$  si  $N[u] = N[v]$ ).

A continuación veamos que es posible particionar el conjunto de vértices de un grafo co-biconvexo  $G$  de manera que la matriz  $A^*(G)$  sea como la que se presenta en la Figura 3.8. Recordamos que  $J$  es una matriz de todos 1's en sus entradas.

Sea  $G$  un grafo co-biconvexo. Supongamos que los vértices de  $G$  están indexados de modo tal que los 0's aparecen consecutivamente en cada columna de  $A^*(G)$  (y por simetría de la matriz  $A^*(G)$ , en cada fila). Sea  $C_1$  el conjunto de columnas de  $A^*(G)$  cuyos 0's están por debajo de la diagonal principal,  $C_2$  el conjunto de las columnas cuyos 0's están por encima de la diagonal principal y  $C_3$  el conjunto de las columnas sin 0's (ver esquema de la Figura 3.8). Este indexamiento de los vértices de  $G$  siempre se puede obtener [75].

	$C_1$	$C_2$
$C_1$	$J$	$A_{C_1 C_2}^*(G)$
$C_2$	$A_{C_2 C_1}^*(G)$	$J$

Figura 3.8: Esquema de  $A^*(G)$  para  $G$  un grafo co-biconvexo con  $C_3 = \emptyset$ .

**Ejemplo 49.** Consideremos el grafo co-biconvexo  $G$  de la Figura 3.3 y la permutación de filas exhibida en (3.2) que se le realizó a la matriz  $A^*(G)$  y que permitió obtener la matriz de la Figura 3.5 en la cual los 0's aparecen consecutivamente en cada columna.

Ahora realizamos a la matriz de la Figura 3.5 la correspondiente permutación de columnas, donde por correspondiente se entiende que si en las filas se consideró la permutación  $f_1 \leftrightarrow f'_6$  entonces ahora consideramos la permutación de las columnas  $c_1 \leftrightarrow c'_6$ . Así reordenamos las columnas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 c_1 &\leftrightarrow c'_6 \\
 c_2 &\leftrightarrow c'_4 \\
 c_3 &\leftrightarrow c'_5 \\
 c_4 &\leftrightarrow c'_1 \\
 c_5 &\leftrightarrow c'_3 \\
 c_6 &\leftrightarrow c'_2 \\
 c_7 &\leftrightarrow c'_7
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Una vez realizado el reordenamiento explicado arriba, obtenemos la matriz presentada en la Figura 3.9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3.9: Matriz de adyacencia ampliada según el renombramiento de los vértices de  $G$  como se muestra en la Fig. 3.10.

Renombramos a continuación los vértices (ver Figura 3.10) según el orden de las filas (columnas) de la matriz presentada en la Figura 3.9.

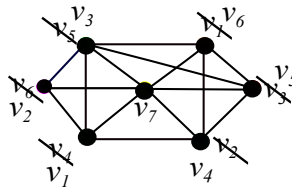


Figura 3.10: Renombramiento de vértices para obtener la partición  $(C_1, C_2, C_3)$  de  $V(G)$ .

Notar que la matriz de la Figura 3.9 es la de adyacencia ampliada del grafo  $G$  presentado en la Figura 3.10.

Identificamos los elementos de  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  con los correspondientes vértices en  $G$  obteniendo así una partición de  $V(G)$ .

**Ejemplo 50.** La mencionada partición del conjunto  $V(G)$  del grafo considerado en el Ejemplo 49 es:

- $C_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ .
- $C_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ .
- $C_3 = \{v_7\}$ .

Los conjuntos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  particionan  $V(G)$ ,  $C_3$  corresponde al conjunto  $\mathcal{U}$  de los vértices universales de  $G$  y  $C_1$  y  $C_2$  son cliques en  $G$  (si un vértice  $v_i \in C_1$  no es adyacente a un

vértice  $v_j$ , el correspondiente 0 en la columna  $j$  y la fila  $i$  tiene que estar por encima de la diagonal ya que el 0 en la columna  $i$ , fila  $j$  está por debajo). Se denotará esta partición por  $(C_1, C_2, \mathcal{U})$ , o simplemente  $(C_1, C_2)$  cuando  $\mathcal{U} = \emptyset$ . Notemos que cuando  $\mathcal{U} = \emptyset$ , es decir cuando  $G$  no tiene vértices universales, se verifica que  $|C_1| \geq 2$  y  $|C_2| \geq 2$  (si  $C_1 = \{v\}$ , como  $G$  es conexo, existe un vértice  $u \in C_2$  tal que  $u$  es adyacente a  $v$ ; como  $C_2$  es una clique en  $G$ , resulta que  $u$  es un vértice universal en  $G$ , contradiciendo ésto al hecho de que  $\mathcal{U} = \emptyset$ ).

Para un grafo co-biconexo  $G$  con partición  $(C_1, C_2)$  utilizaremos la siguiente notación:

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, C_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}, C_2 = \{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}.$$

También, por simplicidad denotaremos  $G_1 := G[C_1]$  y  $G_2 := G[C_2]$ .

Además llamaremos  $A_{C_i C_j}^*(G)$  a la submatriz de  $A^*(G)$  con filas indexadas por  $C_i$  y columnas por  $C_j$ . Observar que  $A_{C_1 C_1}^*(G)$  y  $A_{C_2 C_2}^*(G)$  son ambas iguales a una matriz  $J$  de todas entradas iguales a 1 y de tamaño apropiado.

**Observación 51.** *En un grafo co-biconvexo, sus vértices pueden partitionarse en dos conjuntos tal que los subgrafos que inducen son grafos completos. Esto justifica que los ciclos  $C_n$  para todo  $n \geq 5$  no son grafos co-biconvexos, como fue mencionado en la sección anterior.*

### 3.4. Problema de la $k$ -upla dominación en grafos co-biconvexos

Comencemos hallando condiciones suficientes para obtener una cota superior para el menor tamaño de un conjunto  $k$ -upla dominante de un grafo co-biconvexo.

**Lema 52.** *Sea  $G$  un grafo co-biconvexo y  $k$  un entero positivo. Si  $|C_i| \geq k$  para  $i = 1, 2$ , entonces*

$$\gamma_{\times k}(G) \leq 2k.$$

*Demostración.* Sean  $D_i \subseteq C_i$  con  $|D_i| = k$ , para  $i = 1, 2$  y consideremos el conjunto  $D_1 \cup D_2$ . Para cada  $v \in V(G)$ , si  $v \in C_i$  entonces  $D_i \subseteq N[v]$ . Así  $|N[v] \cap (D_1 \cup D_2)| \geq |D_i| = k$ , para  $i = 1$  ó  $i = 2$ . Si  $v \in \mathcal{U}$ , claramente  $D_1 \cup D_2 \subseteq N[v] = V(G)$  y por lo tanto  $|N[v] \cap (D_1 \cup D_2)| = |D_1 \cup D_2| = 2k \geq k$ . Entonces  $D_1 \cup D_2$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  y se obtiene la cota superior.  $\square$

La Proposición 43 nos permite restringir nuestro estudio a aquellos grafos co-biconvexos sin vértices universales, es decir con partición  $(C_1, C_2)$  de su conjunto de vértices como fue explicado en la sección anterior, con  $|C_1| \geq 2$  y  $|C_2| \geq 2$ . Cabe destacar que una tal partición resulta ser única. Bajo estos supuestos y los Lemas 40 y 52, son válidas las siguientes cotas para cualquier grafo co-biconvexo  $G$  sin vértices universales:

$$k + 1 \leq \gamma_{\times k}(G) \leq 2k.$$

A continuación presentamos:

- (1) Una construcción de dos grafos de intervalos auxiliares definidos a partir de un grafo co-biconvexo  $G$ .
- (2) Una relación entre los conjuntos  $k$ -upla dominantes en un grafo co-biconvexo dado y los conjuntos estables de los grafos de intervalos auxiliares definidos a partir de  $G$ .

Dicha relación permitirá obtener el número de  $k$ -upla dominación de un grafo co-biconvexo.

### 3.4.1. Construcción de grafos de intervalos auxiliares $H_i$

Sea  $G$  un grafo co-biconvexo (no completo) y  $(C_1, C_2)$  la partición de  $V(G)$  mencionada anteriormente. Recordemos que denotamos  $C_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ ,  $C_2 = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  y  $A^*(G)$  satisface el esquema de la Figura 3.8.

Vamos a considerar dos grafos de intervalos  $H_1$  y  $H_2$ . Para ello definimos dos familias de intervalos de la siguiente manera:

- por cada vértice  $v_i \in C_1$ , definimos un intervalo  $I_i$  contenido en  $[r + 1, n]_{\mathbb{N}}$  tal que, si los 0's consecutivos de la columna correspondiente a  $v_i$  corresponden a los vértices  $v_p, \dots, v_{p+s}$  donde  $p \geq r + 1$  y  $p + s \leq n$ , luego  $I_i = [p, p + s]_{\mathbb{N}}$ ;
- por cada vértice  $v_i \in C_2$ , definimos un intervalo  $I_i$  contenido en  $[1, r]_{\mathbb{N}}$  tal que, si los 0's consecutivos de la columna correspondiente  $v_i$  corresponde a los vértices  $v_p, \dots, v_{p+s}$  con  $p \geq 1$  y  $p + s \leq r$ , luego  $I_i = [p, p + s]_{\mathbb{N}}$ .

Los dos grafos de intervalos  $H_1$  y  $H_2$  se definen como los grafos de intersección de las familias  $\mathcal{I}_1 = \{I_1, I_2, \dots, I_r\}$  e  $\mathcal{I}_2 = \{I_{r+1}, I_{r+2}, \dots, I_n\}$ , respectivamente.  $\mathcal{I}_1$  es un modelo de intervalo del grafo  $H_1$  e  $\mathcal{I}_2$  es un modelo de intervalo del grafo  $H_2$ .

Consideramos que  $v_i$  representa al intervalo  $I_i$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ . Vale decir, llamamos del mismo modo a los vértices de  $C_i = V(G_i)$  que a los de  $V(H_i)$ , pero del contexto quedará claro en cada caso a qué conjunto de vértices corresponde.

**Observación 53.** Para un grafo co-biconvexo  $G$  con partición  $(C_1, C_2, \mathcal{U})$  de  $V(G)$  y  $\mathcal{U} \neq \emptyset$ , los grafos  $H_1$  y  $H_2$  se definen como fue explicado arriba sobre el subgrafo  $G - \mathcal{U}$  de  $G$ .

Un ejemplo de la construcción anterior se muestra en la Figura 3.11:

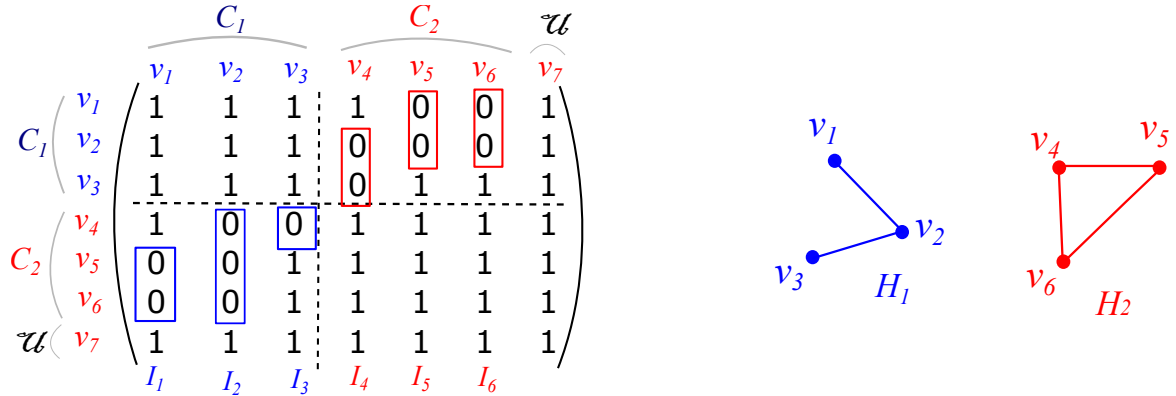


Figura 3.11: Grafos  $H_1$  y  $H_2$  relacionados con el grafo  $G$  de la Figura 3.10.

Notemos que dado dos intervalos con intersección no vacía  $I_i$  y  $I_j$  de  $H_1$  para  $1 \leq i \neq j \leq r$ , existe  $q$  con  $r + 1 \leq q \leq n$  tal que  $a_{qi}^* = a_{qj}^* = 0$ . Esto significa que  $v_q v_i \notin E(G)$  y  $v_q v_j \notin E(G)$ . En otras palabras, dado dos intervalos de  $H_1$  que no se intersecan  $I_i$  y  $I_j$  para  $1 \leq i \neq j \leq r$ , tenemos  $a_{qi}^* = 1$  o  $a_{qj}^* = 1$  para todo  $q$  con  $r + 1 \leq q \leq n$ . Por lo tanto, en cada fila de  $A_{C_2 C_1}^*(G)$  existe al menos un 1 en las columnas correspondientes al vértice  $v_i$  o  $v_j$ , y luego  $v_q v_i \in E(G)$  o  $v_q v_j \in E(G)$  para todo  $q$  con  $r + 1 \leq q \leq n$ .

De manera similar, el argumento anterior se verifica claramente para el grafo de intervalos  $H_2$ .

### 3.4.2. Conjuntos estables de $H_i$ y conjuntos $k$ -uplas dominantes en $G$

Recordemos que el número de estabilidad de un grafo es el mayor tamaño entre todos los conjuntos estables en el grafo. Denotaremos con  $\alpha_i$  al número de estabilidad,  $\alpha(H_i)$ , del grafo de intervalos  $H_i$  construidos en la subsección anterior, para  $i \in \{1, 2\}$ . El número de estabilidad de un grafo de intervalos se puede encontrar en tiempo lineal [37].

Como un primer resultado tenemos:

**Lema 54.** Sean  $G$  un grafo co-biconvexo con partición  $(C_1, C_2)$  de  $V(G)$ ,  $S \subseteq C_j$  para  $j = 1$  o  $j = 2$  y  $t$  un entero positivo. Si  $S$  es un conjunto  $t$ -upla dominante en  $G_i$  con  $i \neq j$  entonces  $|S| \geq t + 1$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{U} = \emptyset$ , es claro que para cada vértice  $v \in C_i$ , existe un vértice  $w \in C_j$  no adyacente a  $v$ , para  $i \neq j$  e  $i \in \{1, 2\}$ . Luego, la desigualdad sigue fácilmente.  $\square$

Por lo tanto, para cualquier subconjunto  $S \subseteq C_i$  para algún  $i \in \{1, 2\}$ :

- $S$  es un conjunto  $|S|$ -upla dominante en  $G_i$ , ya que  $G_i$  es un subgrafo completo y
- si  $S$  es un conjunto  $t$ -upla dominante en  $G$ , a partir del Lema 54 resulta  $t \leq |S| - 1$ .

Al considerar conjuntos estables de los grafos de intervalos  $H_1$  y  $H_2$ , el siguiente hecho será la clave de los resultados en la siguiente sección:

**Proposición 55.** *Sea  $G$  un grafo co-biconvexo con partición  $(C_1, C_2)$  de  $V(G)$  y  $S \subseteq C_i$ , para algún  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces  $S$  es un conjunto estable de  $H_i$  si y solo si  $S$  es un conjunto  $(|S| - 1)$ -upla dominante en  $G_j$ , para  $i \neq j$ .*

*Demostración.* Según la definición,  $S$  es un conjunto  $(|S| - 1)$ -upla dominante en  $G_j$  si y solo si para todo vértice  $v \in C_j$ ,  $|N_G[v] \cap S| \geq |S| - 1$ . En otras palabras,  $S$  es un conjunto  $(|S| - 1)$ -upla dominante en  $G_j$  si y solo si para cada fila de  $A_{C_j C_i}^*(G)$  en las entradas que corresponden a las columnas de los vértices de  $S$ , existe a lo sumo un cero. Esto es equivalente a decir que los intervalos de la familia  $\{I_t\}_{t:v_t \in S}$  son mutuamente no adyacentes en  $H_i$ , es decir que  $S$  es un conjunto estable de  $H_i$ . □

En el teorema siguiente, mostramos condiciones suficientes sobre los números de estabilidad de  $H_1$  y  $H_2$  para hallar los números de  $k$ -upla dominación de un grafo co-biconvexo.

**Teorema 56.** *Sea  $G$  un grafo co-biconvexo con partición  $(C_1, C_2)$  de  $V(G)$ ,  $H_i$  los grafos de intervalos definidos en la sección anterior,  $\alpha_i$  el número de estabilidad de  $H_i$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$  y  $k \leq \delta(G) + 1$ . Luego*

1. Si  $\alpha_i = 1$  y  $D$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$ , entonces  $|D \cap C_j| \geq k$  con  $1 \leq i \neq j \leq 2$ .
2. Si  $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$  entonces  $\gamma_{\times k}(G) = 2k$ .
3. Si  $\alpha_1 + \alpha_2 > k$  entonces  $\gamma_{\times k}(G) = k + 1$ .
4. Si  $\alpha_1 + \alpha_2 = k$  y  $|C_i| \geq \alpha_i + 1$  para  $i \in \{1, 2\}$  entonces  $\gamma_{\times k}(G) = k + 2$ .

*Demostración.*

1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $i = 1$ . Entonces como  $\alpha_1 = 1$ , los vértices en  $H_1$  son mutuamente adyacentes. Por lo tanto, los intervalos correspondientes se intersecan dos a dos. Sabemos que el modelo de intervalos de un grafo de intervalos cumple la propiedad Helly. Luego, hay un punto que pertenece a cada intervalo y por lo tanto hay una fila  $j$  en  $A_{C_2 C_1}^*(G)$  que contiene solo 0's. Luego, el vértice  $v_j \in C_2$  no es adyacente a ningún vértice en  $C_1$ . Esto implica que  $|D \cap C_2| \geq k$  para cada conjunto  $k$ -upla dominante  $D$  en  $G$ .

2. Si  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , el apartado anterior ya demostrado en este teorema implica que cualquier conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  tiene por lo menos  $2k$  vértices. De este modo,  $\gamma_{\times k}(G) \geq 2k$ . La igualdad sigue del Lema 52.

3. Sean  $S_1$  y  $S_2$  conjuntos estables de  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente, con  $|S_1 \cup S_2| = k + 1$ .

Sabemos que  $S_i$  es un conjunto  $|S_i|$ -upla dominante en  $G_i$  y también, de la Proposición 55, sabemos que es un conjunto  $(|S_i| - 1)$ -upla dominante en  $G_j$ , para cada  $i, j \in \{1, 2\}$  y  $i \neq j$ . Así  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  y luego  $\gamma_{\times k}(G) \leq k + 1$ . Además, por el Lema 40 sabemos que  $\gamma_{\times k}(G) > k$ . Luego  $\gamma_{\times k}(G) = k + 1$ .

4. Sean  $S_1$  y  $S_2$  conjuntos estables de máximo tamaño de  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente. Es claro que  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto  $(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)$ -upla dominante en  $G$ , es decir es un conjunto  $(k - 1)$ -upla dominante en  $G$ . Consideremos dos vértices,  $w_1 \in C_1 - S_1$  y  $w_2 \in C_2 - S_2$ . El conjunto  $S_1 \cup S_2 \cup \{w_1, w_2\}$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  de tamaño  $k + 2$ , lo que implica que  $\gamma_{\times k}(G) \leq k + 2$ .

Ahora, como  $\gamma_{\times k}(G) \geq k + 1$  ( $\mathcal{U} = \emptyset$ ), basta demostrar que  $\gamma_{\times k}(G) \neq k + 1$ . Supongamos que  $D$  es un conjunto  $k$ -upla dominante de menor tamaño en  $G$  con  $|D| = k + 1$  y denotemos  $D_1 := D \cap C_1$ ,  $D_2 := D \cap C_2$ ,  $d_1 := |D_1|$  y  $d_2 := |D_2|$ . Por la Afirmación 57 podemos considerar  $\alpha_1 < d_1$  y  $\alpha_2 \geq d_2$ .

**Afirmación 57.** *Sea  $G$  un grafo co-biconvexo con partición  $(C_1, C_2)$  de  $V(G)$ ,  $H_i$  los grafos de intervalos definidos en la sección anterior, y  $\alpha_i$  el número de estabilidad de  $H_i$ ,  $d_i = |D_i|$  donde  $D_i = D \cap C_i$  para cada  $i \in \{1, 2\}$  siendo  $D$  un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$  con  $|D| = k + 1$ . Luego  $\alpha_i < d_i$  y  $\alpha_j \geq d_j$  para algún  $i \in \{1, 2\}$  y  $j \neq i$  con  $j \in \{1, 2\}$ .*

*Demostración.*

- Si  $\alpha_1 < d_1$  entonces  $\alpha_1 \leq d_1 - 1 = k - d_2$  (recordar que  $k + 1 = d_1 + d_2$ ). Como por hipótesis  $k = \alpha_1 + \alpha_2$ , se tiene  $k = \alpha_1 + \alpha_2 \leq (k - d_2) + \alpha_2$  y en consecuencia  $\alpha_2 - d_2 \geq 0$  o equivalentemente  $\alpha_2 \geq d_2$ .
- $\alpha_1 \geq d_1 \Rightarrow d_1 + \alpha_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 = k = d_1 + d_2 - 1$  De aquí resulta que  $\alpha_2 \leq d_2 - 1$  o equivalentemente  $\alpha_2 < d_2$ .

□

Como  $\alpha_1 < d_1$  y  $\alpha_2 \geq d_2$  y entonces  $D_1$  no es un conjunto estable de  $H_1$ . Luego, por la Proposición 55,  $D_1$  domina en el mejor de los casos a  $d_1 - 2$  vértices en  $C_2$ . Por lo tanto, para cada  $v \in C_2$ , se verifica que  $|N[v] \cap D| \leq d_1 - 2 + d_2 = k - 1$ , lo que contradice el hecho de que  $D$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $G$ .

□

Los resultados hasta ahora mencionados permiten resolver completamente los problemas para los casos  $k = 2$  y  $k = 3$ , como se muestra en las dos subsecciones siguientes.

### 3.4.3. Problema de la 2-upla dominación

**Teorema 58.** *Sea  $G$  un grafo co-biconvexo con partición  $(C_1, C_2, \mathcal{U})$  de  $V(G)$ ,  $H_i$  los grafos de intervalos definidos en la sección anterior, y  $\alpha_i$  el número de estabilidad de  $H_i$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ .*

1. Si  $|\mathcal{U}|=1$  entonces  $\gamma_{\times 2}(G) = 3$ .
2. Si  $|\mathcal{U}| \geq 2$  entonces  $\gamma_{\times 2}(G) = 2$ .
3. Si  $|\mathcal{U}| = 0$  y  $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 3$  entonces  $\gamma_{\times 2}(G) = 3$ .
4. Si  $|\mathcal{U}| = 0$  y  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  entonces  $\gamma_{\times 2}(G) = 4$ .

*Demostración.*

1. Del Lema 42 se tiene que  $\gamma_{\times k}(G) = \gamma_{\times k-1}(G - \mathcal{U}) + 1$ . Como  $G - \mathcal{U}$  no tiene vértices universales, el Lema 40 implica  $\gamma_{\times 1}(G - \mathcal{U}) \geq 2$ . El conjunto  $\{w_1, w_2\}$  es un conjunto 1-upla dominante en  $G - \mathcal{U}$ , donde  $w_1 \in C_1$  y  $w_2 \in C_2$  son dos vértices cualesquiera. Entonces  $\gamma_{\times 1}(G - \mathcal{U}) = 2$ .
2. Sigue del Lema 40.
3. Sigue del Teorema 56, apartado 3.
4. Sigue del Teorema 56 apartado 4, teniendo en cuenta que el hecho  $|\mathcal{U}| = 0$  implica  $|C_i| \geq 2$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

□

### 3.4.4. Problema de la 3-upla dominación

**Teorema 59.** *Sea  $G$  un grafo co-biconvexo con partición  $(C_1, C_2, \mathcal{U})$ ,  $H_i$  los grafos de intervalos definidos en la sección previa, y  $\alpha_i$  el número de estabilidad de  $H_i$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ .*

1. Si  $|\mathcal{U}| = 1$ , entonces
 
$$\begin{aligned} \gamma_{\times 3}(G) &= 4 & \text{si } \alpha_1 + \alpha_2 &\geq 3, \\ \gamma_{\times 3}(G) &= 5 & \text{si } \alpha_1 + \alpha_2 &= 2. \end{aligned}$$
2. Si  $|\mathcal{U}| = 2$  entonces  $\gamma_{\times 3}(G) = 4$ .

3. Si  $|\mathcal{U}| \geq 3$  entonces  $\gamma_{\times 3}(G) = 3$ .
4. Si  $|\mathcal{U}| = 0$  y  $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 4$  entonces  $\gamma_{\times 3}(G) = 4$ .
5. Si  $|\mathcal{U}| = 0$  y  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  entonces  $\gamma_{\times 3}(G) = 6$ .
6. Si  $|\mathcal{U}| = 0$  y  $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$  entonces  $\gamma_{\times 3}(G) = 5$ .

*Demostración.* Del mismo modo que en el teorema anterior, la prueba sigue aplicando los Lemas 40 y 42, la Proposición 43, el Teorema 56 y el Teorema 58.  $\square$

La recursividad que nos proporciona la Proposición 43 junto con lo desarrollado hasta aquí, nos permiten resolver de manera eficiente nuestros problemas en grafos co-biconvexos para todos los valores de  $k$  indicados, como lo enuncia el siguiente corolario:

**Corolario 60.** *El problema de la  $k$ -upla dominación puede resolverse eficientemente sobre un grafo co-biconvexo  $G$  de orden  $n$  para cada  $2 \leq k \leq |\mathcal{U}| + 3$ , donde  $\mathcal{U}$  es el conjunto de vértices universales de  $G$ .*

*Demostración.* Dado un grafo co-biconvexo  $G$ , seguimos el siguiente esquema:

1. Construimos la matriz de adyacencia ampliada  $A^*(G)$ .
2. Consideramos la matriz  $B(G)$  obtenida a partir de  $A^*(G)$  al cambiar los 0's por 1's y los 1's por 0's.
3. Aplicamos el algoritmo de orden  $O(n^2)$  presentado en [9] a la matriz  $B(G)$  para obtener la permutación de filas que hacen que los 1's aparezcan consecutivamente en cada columna. Permutamos dichas filas.
4. Volvemos a intercambiar los 0's por 1's y los 1's por 0's y así tenemos una matriz  $\widehat{A}^*(G)$  con los 0's consecutivamente en cada columna que resulta ser la obtenida de  $A^*(G)$  luego de la permutación de las filas dadas por el algoritmo mencionado en el apartado anterior. Permutamos también las correspondientes columnas de  $\widehat{A}^*(G)$  para obtener la estructura que se muestra en Fig. 3.8.
5. Construimos los grafos de intervalos  $H_1$  y  $H_2$  como se explicó en la Sección 3.4.1 y hallamos el número de estabilidad de  $H_i$  para  $i = 1, 2$ . Como ya se señaló, esto se puede hallar en tiempo lineal [37].
6. Aplicar el Teorema 58 y el Teorema 59.

A partir de la Proposición 43, la prueba queda completa.  $\square$

Concluimos este capítulo aplicando los resultados anteriores obtenidos al grafo  $G$  de la Figura 3.3.

**Ejemplo 61.** Recordemos el grafo  $G$  de la Figura 3.3 y los grafos de intervalos auxiliares  $H_1$  y  $H_2$  que se muestran en la Figura 3.11. Los resultados expuestos en esta sección pueden aplicarse apropiadamente para calcular los valores de  $\gamma_{\times i}(G)$  para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Como  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = 1$ , se tiene:

$$\gamma_{\times 4}(G) = \gamma_{\times 3}(G - v_7) + 1 = 5 + 1 = 6,$$

$$\gamma_{\times 3}(G) = \gamma_{\times 2}(G - v_7) + 1 = 3 + 1 = 4,$$

$$\gamma_{\times 2}(G) = 3$$

$$\gamma_{\times 1}(G) = 1.$$

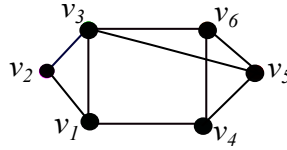


Figura 3.12: Grafo  $G - \mathcal{U}$ , donde  $G$  es el grafo presentado en la Figura 3.10 y  $\mathcal{U} = \{v_7\}$ .

**Observación 62.** Hemos mostrado en este capítulo cómo resolver con optimalidad el problema de la 2-upla dominación y de la 3-upla dominación en grafos co-biconvexos y, a partir allí, los problemas de  $k$ -upla dominación para todo entero positivo  $k$ , con  $k \leq |\mathcal{U}| + 3$ , siendo  $\mathcal{U}$  el conjunto de los vértices universales del grafo co-biconvexo  $G$ .

Para valores más grandes de  $k$ , no es posible independizarse del conjunto estable que el algoritmo elige en cada iteración, ya que conjuntos estables máximos distintos conducen a conjuntos  $k$ -upla dominantes que pueden o no ser mínimos.

A modo de ilustración, a continuación presentamos un grafo de intervalos en el cual el número de estabilidad en el subgrafo obtenido luego de eliminar un conjunto estable máximo varía dependiendo del conjunto estable máximo elegido.

Consideramos el grafo de intervalos  $H$  presentado en la Figura 3.13.

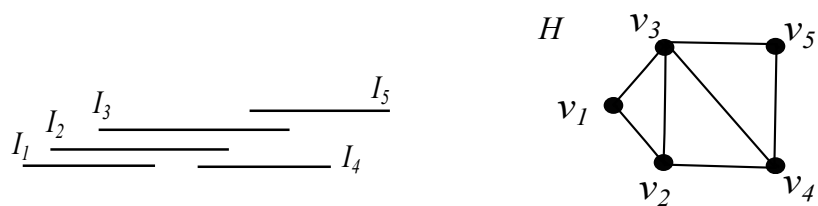


Figura 3.13: Grafo de intervalos  $H$ .

Este grafo  $H$  es tal que su número de estabilidad es dos ( $\alpha(H) = 2$ ). Sin embargo,  $S = \{v_2, v_5\}$  y  $S' = \{v_1, v_5\}$  son conjuntos estables máximos de  $H$ , pero los subgrafos que se obtienen por borrado de los vértices de  $S$  y  $S'$  respectivamente tienen números de estabilidad distintos; vale decir:

$$\alpha(H - S) = 2, \text{ mientras que } \alpha(H - S') = 1.$$

## Capítulo 4

### $k$ -upla dominación en grafos web

## Resumen

En este capítulo se presenta el estudio del problema de la  $k$ -upla dominación sobre una subclase de grafos arco-circulares cuyas matrices de adyacencia ampliada satisfacen ciertas propiedades «circulares»; estos son los grafos web denotados por  $W_n^m$ .

El problema de la  $k$ -upla dominación ya estaba resuelto en grafos web, desde el punto de vista poliedral, solo para los casos  $k = 2$  y  $k = 2m$  [Argiroffo et al., 2010]. En este capítulo, con un enfoque diferente basado en la aritmética modular para números enteros y la “propiedad circular” que verifica la matriz de adyacencia ampliada de un grafo web, se generaliza y completa el estudio de estos problemas en esta clase de grafos, obteniendo el valor exacto de  $\gamma_{\times k}(W_n^m)$  para cada entero positivo  $k$  y cada grafo web  $W_n^m$ .

Los grafos web fueron definidos por Trotter en [74] y han sido muy estudiados en la literatura desde su aparición en 1975 en el contexto de la teoría poliedral de los problemas de empaquetamiento de conjuntos.

A continuación abordamos el estudio del problema de la  $k$ -upla dominación en esta clase de grafos. Sus matrices de adyacencia ampliada satisfacen la propiedad de los 1's circulares por columnas, Circ1P, descrita en el Capítulo 1. Recordemos que esta propiedad caracteriza a la subclase de grafos arco-circulares dada por los grafos concave-round. Además, los grafos concave-round constituyen a su vez una superclase de la clase de grafos analizados en el Capítulo 3, los grafos co-biconvexos.

### 4.1. Notaciones generales y congruencia módulo $n$

Antes de comenzar con el estudio de los problemas de la  $k$ -upla dominación en grafos web, recordamos su definición.

Dado dos números enteros positivos  $n$  y  $m$  con  $m \geq 1$  y  $n \geq 2m + 1$ , un grafo *web* denotado por  $W_n^m$  es un grafo donde  $V(W_n^m) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $v_i v_j \in E(W_n^m)$  si y sólo si  $j \equiv i \pm l \pmod{n}$  y  $l \in \{1, \dots, m\}$  [74]. Está claro que  $|N[v_i]| = 2m + 1$  para  $v_i \in V(W_n^m)$ . En la Figura 4.1 se presenta un ejemplo de un grafo web, el  $W_{15}^4$ , junto con su matriz de adyacencia ampliada.

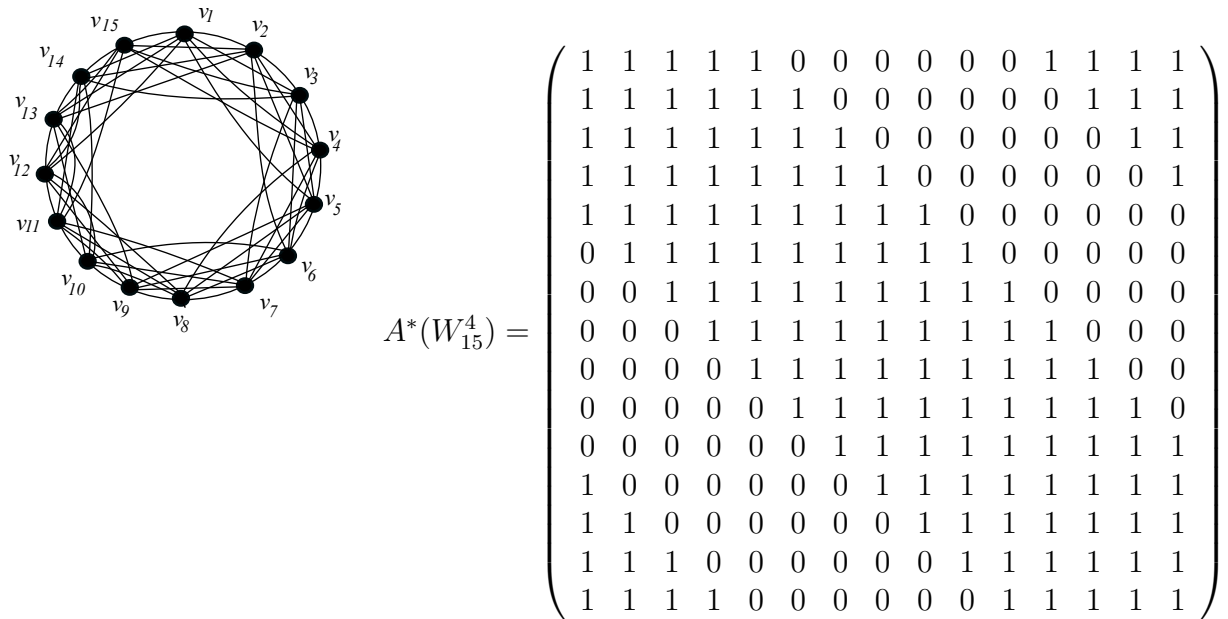


Figura 4.1: Grafo web  $W_{15}^4$  y su matriz de adyacencia ampliada

Dados dos números enteros  $a$  y  $b$ , el máximo común divisor entre  $a$  y  $b$ , es decir, el mayor entero positivo que divide tanto  $a$  como a  $b$ , se denotará por  $mcd(a, b)$ .

En este capítulo se indicará con  $[a, b]$  al intervalo natural, es decir con extremos  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  ( $a \leq b$ ) junto con todos los números naturales comprendidos entre  $a$  y  $b$ .

Dados dos números enteros  $a$  y  $b$  con  $a < b$  y un entero positivo  $m$ , decimos que  $a$  es *congruente* con  $b$  módulo  $m$ , y lo denotamos por  $a \equiv b \pmod{m}$ , si ambos tienen el mismo resto cuando se los divide por  $m$ , o equivalentemente, si  $b - a$  es un múltiplo de  $m$ . Se sabe que la congruencia módulo  $m$  es una relación de equivalencia. Para números enteros  $i$  y  $m$ , el conjunto de todos los números enteros que son congruentes con  $i$  módulo  $m$  (llamado *clase de equivalencia* de  $i$  módulo  $m$ ), lo denotamos por  $[i]_m$ . Es bien sabido que  $\{[i]_m\}_{i=0}^{m-1}$  constituye una partición de  $\mathbb{Z}$ .

## 4.2. Resultados técnicos: Partición del conjunto de vértices de un grafo web

A partir de la definición de grafos web resulta que la matriz de adyacencia ampliada de ellos satisfacen la *propiedad de los 1's circulares* (Circ1P) por columnas introducida por Tucker en [75], es decir, existe una permutación de sus filas por la cual los 1's en cada columna aparecen en forma circular consecutiva; informalmente se puede pensar que si la matriz envuelve un cilindro, los 1's quedan ubicados consecutivamente (ver ejemplo en la Figura 4.1). Tucker demostró que los grafos cuya matriz de adyacencia ampliada satisface la Circ1P por columnas son arco-circulares [75].

Todas las matrices que se consideren en este capítulo serán matrices 0 – 1. Cuando una entrada es un cero la denominaremos una  $0$ -entrada y cuando es un uno, una  $1$ -entrada.

Dados dos números enteros positivos  $n$  y  $m$  con  $n \geq 2m + 1$ , consideramos la división entera entre  $n$  y  $2m + 1$ . El cociente de dicha división se denotará con  $c$  y el resto con  $r$ , donde  $0 \leq r < 2m + 1$ ; es decir  $n = c(2m + 1) + r$ .

Además, denotaremos con  $M$  al máximo común divisor entre  $2m + 1$  y  $r$ , es decir  $M := \text{mcd}(2m + 1, r)$ .

Entonces, existen dos números enteros positivos  $l_1$  y  $l_2$  de modo que:

$$r = l_1 M, \quad 2m + 1 = l_2 M$$

y luego

$$n = (cl_2 + l_1) M.$$

Todos los resultados en este capítulo siguen la notación recién introducida.

A continuación se presentan los siguientes resultados que serán de gran utilidad en las secciones que siguen:

**Lema 63.**  $\text{mcd}(l_2, cl_2 + l_1) = 1$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\text{mcd}(l_2, cl_2 + l_1) \neq 1$ , es decir, existen  $s, w, z \in \mathbb{Z}^+$  con  $s \geq 2$ , tales que  $l_2 = sw$  y  $cl_2 + l_1 = sz$ . Esto implica  $l_1 = (z - cw)s$ . Por un lado, como  $r = l_1M$  tenemos  $r = (z - cw)sM$ . Por otro, ya que  $2m + 1 = l_2M$  tenemos  $2m + 1 = swM$ . Así,  $sM$  es un divisor común entre  $2m + 1$  y  $r$ , que es mayor que  $M$  ya que  $s \geq 2$ , lo que conduce a una contradicción.  $\square$

**Lema 64.** *El conjunto  $[i]_M \cap [1, n]$  tiene cardinalidad  $\frac{n}{M}$  para cada  $i = 1, \dots, M$ .*

*Demostración.* Esto sigue fácilmente del hecho que  $M$  es un divisor de  $n$  y que  $\{[i]_M \cap [1, n]\}_{i=1}^M$  es una partición de  $[1, n]$  en conjuntos de la misma cardinalidad. En efecto,  $n = (cl_2 + l_1)M$  y para cada  $i$  fijo, el conjunto  $[i]_M \cap [1, n]$  está formado por aquellos números naturales  $j \in [1, n]$  tales que  $j$  e  $i$  tienen el mismo resto en la división por  $M$ .  $\square$

De aquí en adelante denotaremos para cada  $i = 1, \dots, M$ ,

$$S_i := [i]_M \cap [1, n].$$

**Ejemplo 65.** *Para  $n = 15$  y  $m = 4$  tenemos  $2m + 1 = 9$ ,  $r = 6$  y  $M = \text{mcd}(9, 6) = 3$ . Los conjuntos  $S_i$  son:*

- $S_1 = [1]_3 \cap [1, 15] = \{1, 4, 7, 10, 13\}$ ,
- $S_2 = [2]_3 \cap [1, 15] = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ ,
- $S_3 = [3]_3 \cap [1, 15] = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ .

El próximo resultado proporciona una forma alternativa de expresar a los conjuntos  $S_i$  para  $i = 1, \dots, M$  que será crucial, ya que nos conduce a definir un ordenamiento entre los vértices de un grafo web  $W_n^m$ .

**Proposición 66.** *Para cada  $i = 1, \dots, M$  se verifica que*

$$S_i = \bigcup_{t \in [0, n/M-1]} \{w \in [1, n] : w \equiv i + t(2m + 1) \pmod{n}\}.$$

*Demostración.* Es sencillo ver que para  $i = 1, \dots, M$ ,

$$\bigcup_{t \in [0, n/M-1]} \{w \in [1, n] : w \equiv i + t(2m + 1) \pmod{n}\} \subseteq S_i.$$

Por el Lema 64, es suficiente probar que

$$\left| \bigcup_{t \in [0, n/M-1]} \{w \in [1, n] : w \equiv i + t(2m + 1) \pmod{n}\} \right| = \frac{n}{M}.$$

Sean  $t_1$  y  $t_2$  tales que  $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{n}{M} - 1$ . Entonces

$$i + t_1(2m + 1) \equiv i + t_2(2m + 1) \pmod{n}, \text{ es decir}$$

$$t_1(2m + 1) \equiv t_2(2m + 1) \pmod{n}, \text{ de donde surge que}$$

$$(t_2 - t_1)(2m + 1) \text{ es un múltiplo de } n.$$

Luego existe  $s \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $(t_2 - t_1)(2m + 1) = sn$ .

Recordando que  $r = l_1M$  y  $2m + 1 = l_2M$ , obtenemos  $(t_2 - t_1)l_2M = s(cl_2 + l_1)M$  de donde surge que  $s(cl_2 + l_1)$  es un múltiplo de  $l_2$ . Del Lema 63, resulta que  $s$  es un múltiplo de  $l_2$ , es decir  $s = \alpha l_2$  para algún  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  con  $\alpha \geq 2$ . De esta forma se tiene  $t_2 - t_1 = \alpha(cl_2 + l_1)$  y de aquí  $t_2 - t_1 = \alpha \frac{n}{M} > \frac{n}{M}$ , lo que nos conduce a una contradicción ya que  $0 < t_2 - t_1 \leq \frac{n}{M} - 1$ .  $\square$

Ahora apliquemos los resultados anteriores al conjunto de vértices de un grafo web.

Consideremos el grafo  $W_n^m$ , para algún  $m$  y  $n$  enteros positivos con  $n \geq 2m + 1$ . A partir de la definición de un grafo web, está claro que para todo  $j = 1, \dots, n$ , la vecindad cerrada del vértice  $v_{m+j}$  es

$$N[v_{m+j}] = \{v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+2m}\}, \quad (4.1)$$

donde las sumas en los subíndices se consideran módulo  $n$  y, claramente, todos los subíndices pertenecientes al  $[1, n]$ .

De ahora en adelante, en todas las sumas se considera su congruente módulo  $n$  que pertenece al  $[1, n]$ .

Los elementos (números) de cada  $S_i$  tomarán el rol de los subíndices de los vértices de una web  $W_n^m$  a través de la siguiente biyección:  $j \in S_i$  representa a  $v_{m+j} \in V(W_n^m)$ .

De esta manera, como corolario del Lema 64 y de la Proposición 66 podemos enunciar:

**Corolario 67.**  $\{S_i\}_{i=1}^M$  es una partición de  $V(W_n^m)$  en conjuntos de cardinalidad  $\frac{n}{M}$ .

**Ejemplo 68.** Los conjuntos  $S_i$  presentados en el Ejemplo 65 particionan al conjunto de vértices del grafo web  $W_{15}^4$  en conjuntos de cardinalidad 5.

$$S_1 = \{1, 4, 7, 10, 13\} \leftrightarrow \{v_5, v_8, v_{11}, v_{14}, v_2\}.$$

$$S_2 = \{2, 5, 8, 11, 14\} \leftrightarrow \{v_6, v_9, v_{12}, v_{15}, v_3\}.$$

$$S_3 = \{3, 6, 9, 12, 15\} \leftrightarrow \{v_7, v_{10}, v_{13}, v_1, v_4\}.$$

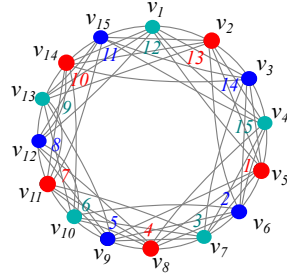


Figura 4.2: Partición de  $V(W_{15}^4)$

### 4.3. Conjuntos $k$ -upla dominantes en grafos web. Un algoritmo

Iniciamos esta sección señalando que los conjuntos  $S_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, M\}$  serán fundamentales cuando se quiera hallar un conjunto  $k$ -upla dominante de mínimo tamaño en un grafo web.

Comencemos demostrando que  $S_i$  es un conjunto  $l_2$ -upla dominante de  $W_n^m$ , para cada  $i \in \{1, \dots, M\}$ . En efecto,

**Proposición 69.** *Dado un grafo web  $W_n^m$ , para cada vértice  $v \in V(W_n^m)$  y cada  $i \in \{1, \dots, M\}$  se verifica que  $|N[v] \cap S_i| = l_2$ , donde  $2m + 1 = l_2M$  y  $l_2 \in \mathbb{Z}^+$ .*

*Demostración.* Sea  $i \in \{1, \dots, M\}$ . Del Lemma 64, como  $2m + 1 = l_2M$ , tenemos que cada intervalo natural de longitud  $2m + 1$  está particionado en  $M$  conjuntos, conteniendo cada uno de ellos  $l_2$  elementos de  $S_i$ . En particular esto vale para  $N[v]$ , para cada vértice  $v$ .  $\square$

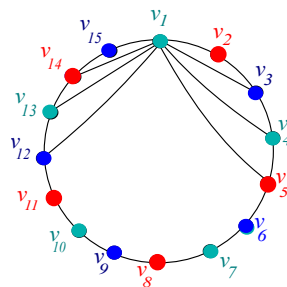


Figura 4.3:  $N[v_1]$  tiene  $l_2 = 3$  vértices de  $S_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , donde  $v_1 \in W_{15}^4$ .

**Lema 70.** *Sea  $W_n^m$  un grafo web, y  $l_2 \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $2m + 1 = l_2M$ . Luego*

$$\gamma_{\times l_2}(W_n^m) = \frac{n}{M}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 69 sabemos que  $S_1$  es un conjunto  $l_2$ -upla dominante en  $W_n^m$  y luego  $\gamma_{\times l_2}(W_n^m) \leq \frac{n}{M}$ .

Si  $\gamma_{\times l_2}(W_n^m) < \frac{n}{m}$ , entonces existe un conjunto  $l_2$ -upla dominante  $D$  en  $W_n^m$  tal que  $|D| \leq \frac{n}{M} - 1$ . Entonces tenemos que:

$$\sum_{v \in V(W_n^m)} |N[v] \cap D| = \sum_{v \in D} |N[v]| = |D|(2m+1) \leq \frac{n(2m+1)}{M} - (2m+1) = nl_2 - (2m+1) < l_2n,$$

luego existe un vértice  $v \in V(W_n^m)$  tal que  $|N[v] \cap D| < l_2$  lo que contradice el hecho de que  $D$  es un conjunto  $l_2$ -upla dominante en  $W_n^m$ .

Por lo tanto  $\gamma_{\times l_2}(W_n^m) = \frac{n}{M}$ . □

La Proposición 66 permite considerar un ordenamiento — inducido por las vecindades cerradas — de los vértices en cada  $S_i$  comenzando por  $i$ , de tal manera que cada vértice se obtiene del anterior en este ordenamiento como un “movimiento circular” de  $2m + 1$  posiciones. Esto se formaliza en la siguiente definición:

**Definición 71.** Dado un grafo web  $W_n^m$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$  y  $j, q$  dos vértices en  $S_i$ , decimos que  $q$  es 1-contiguo a  $j$  cuando  $q \equiv j + 2m + 1 \pmod{n}$ .

**Ejemplo 72.** Para el conjunto  $S_1$  que pertenece a la partición de  $V(W_{15}^4)$  (ver Ejemplo 68), tenemos:

- 10 es 1-contiguo a 1,
- 4 es 1-contiguo a 10,
- 13 es 1-contiguo a 4,
- 7 es 1-contiguo a 13.

Dado un grafo web e  $i \in \{1, \dots, M\}$ , a partir de ahora consideramos a  $S_i$  con el ordenamiento inducido en él por la relación introducida en la Definición 71 y lo denotamos con  $\langle S_i \rangle = (s_1^i, \dots, s_{\frac{n}{M}}^i)$  para expresar que los elementos de  $S_i$  están listados según ese ordenamiento, empezando por  $i$ .

**Ejemplo 73.** Para el grafo web  $W_{15}^4$  (ver Figura 4.1 y Ejemplo 68), podemos escribir:

- $\langle S_1 \rangle = (1, 10, 4, 13, 7),$
- $\langle S_2 \rangle = (2, 11, 5, 14, 8),$

- $\langle S_3 \rangle = (3, 12, 6, 15, 9)$ .

**Observación 74.** *Notemos que:*

(1) *Cuando  $q$  es 1-contiguo a  $j$ , se verifica que*

$$|N[j] \cup N[q]| = \begin{cases} n & \text{si } c = 1 \\ 2(2m + 1) & \text{si } c \geq 2; \end{cases}$$

(2)  *$c + 1$  vértices cualesquiera tales que uno es 1-contiguo del anterior forman un conjunto 1-upla dominante en  $W_n^m$ ;*

(3) *para cada  $i \in \{1, \dots, M\}$ , en  $S_i$  se verifica:*

- *para cada  $0 \leq t < \frac{n}{M} - 1$  si  $w \in [1, n]$  es tal que  $w \equiv i + (t + 1)(2m + 1) \pmod{n}$  entonces  $w$  es 1-contiguo de  $v \in [1, n]$  tal que  $v \equiv i + t(2m + 1) \pmod{n}$ .*
- *$w' \in [1, n]$  tal que  $w' \equiv i + 0(2m + 1) \pmod{n}$  es 1-contiguo de  $v' \in [1, n]$  con  $v' \equiv i + \left(\frac{n}{M} - 1\right)(2m + 1) \pmod{n}$ .*

A continuación presentamos tres procedimientos que se utilizarán para obtener un conjunto  $k$ -upla dominante en un grafo web  $W_n^m$ :

1. El Procedimiento **DIV** ( $t, w$ ) del cual se obtiene el cociente ( $c$ ) y el resto ( $r$ ) de la división entera entre  $t$  y  $w$ .
2. Dado  $m, n \in \mathbb{Z}^+$  e  $i \in \{1, \dots, M\}$ , el Procedimiento **PROC** ( $n, m, i$ ) —basado en la Proposición 66— devuelve el conjunto ordenado  $\langle S_i \rangle$ .
3. El Procedimiento **DOM**( $n, m, \langle S_i \rangle, \alpha$ ), descrito seguidamente, devuelve como salida un conjunto  $\alpha$ -upla dominante de un grafo web  $W_n^m$ , para cada entero positivo  $\alpha \leq l_2$  ( $\alpha$ -fijo). Este procedimiento agrega al conjunto  $D$ , en primer lugar, el primer elemento de  $\langle S_i \rangle$  y luego, en cada paso elige el siguiente elemento según el ordenamiento en  $\langle S_i \rangle$ . El procedimiento se detiene cuando cada vértice de  $W_n^m$  tiene al menos  $\alpha$  vértices adyacentes en  $D$ .

**procedure DOM** ( $n, m, \langle S_j \rangle, \alpha$ )

$t = 0$

$h = 1$

**DIV** ( $n, 2m + 1$ )

```

 $M = \text{mcd}(2m + 1, r)$ 
 $D = \emptyset;$ 
while  $h \leq \alpha$  do
     $i = t + 1$ 
    while  $s_i^j + 2m < n \wedge i \leq \frac{n}{M}$  do
         $D = D \cup \{s_i^j\}$ 
         $i = i + 1$ 
    end while
     $D = D \cup \{s_i^j\}$ 
     $h = h + 1$ 
     $t = i$ 
end while
end procedure

```

Aplicamos el procedimiento anterior en un ejemplo.

**Ejemplo 75.** Para el grafo web  $W_{15}^4$ , tenemos  $2m + 1 = 9$  y  $n = 1 \cdot 9 + 6$ , vale decir  $r = 6$  y  $c = 1$ . Además  $M = \text{mcd}(2m + 1, r) = 3$  y  $l_2 = 3$ .

Sabiendo que  $\langle S_1 \rangle = (1, 10, 4, 13, 7)$  y aplicando el **procedure**  $DOM(15, 4, \langle S_1 \rangle, 3)$  tenemos que:

<i>Iteración</i>	<i>Conjunto <math>D</math></i>	<i>Conjunto</i>
$h = 1$	$D := \{1, 10\} \leftrightarrow \{v_5, v_{14}\}$	1-upla dominante
$h = 2$	$D := D \cup \{4, 13\} \leftrightarrow \{v_5, v_{14}, v_8, v_3\}$	2-upla dominante
$h = 3$	$D := D \cup \{7\} \leftrightarrow \{v_5, v_{14}, v_8, v_3, v_{11}\}$	3-upla dominante

Considerando los procedimientos presentados anteriormente:

- el Procedimiento **PROC**  $(n, m, i)$ ,
- el Procedimiento **DIV**  $(t, w)$  y
- el Procedimiento **DOM** $(n, m, \langle S_i \rangle, \alpha)$ ,

podemos con todos ellos construir el Algoritmo 1 presentado a continuación el cual devuelve un conjunto  $k$ -upla dominante de tamaño mínimo en un grafo web  $W_n^m$ , para cada entero positivo fijo  $k \leq 2m + 1$ .

---

**Algoritmo 1:** Conjunto  $k$ -upla dominante mínimo en  $W_n^m$  ( $k$ -fijo)

---

**Entrada:**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2m + 1$ .

**Salida:** Un conjunto  $k$ -upla dominante mínimo  $D$  en  $W_n^m$ .

**1:**  $\text{DIV}(n, 2m + 1)$  y obtener cociente  $c$  y resto  $r$ .

**2:**  $M := \text{mcd}(2m + 1, r)$ .

**3:**  $\text{DIV}(2m + 1, M)$  y obtener cociente  $l_2$ .

**4:**  $\text{PROC}(n, m, 1)$  y obtener  $\langle S_1 \rangle$ .

**5:** Si  $k \leq l_2$  luego  $D = \text{DOM}(n, m, \langle S_1 \rangle, k)$ .

sino ( $k > l_2$ )  $\text{DIV}(k, l_2)$  y obtener cociente  $\tilde{c}$  y resto  $\tilde{r}$ .

$D = \text{DOM}(n, m, \langle S_1 \rangle, \tilde{r}) \cup \text{PROC}(n, m, 2) \cup \dots \cup \text{PROC}(n, m, \tilde{c} + 1)$ .

---

El Algoritmo 1 descrito anteriormente nos permite demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 76.** Para un grafo web  $W_n^m$  y un entero positivo  $k \leq 2m + 1$ ,

$$\gamma_{\times k}(W_n^m) = \left\lceil \frac{kn}{2m + 1} \right\rceil.$$

*Demostración.* Comencemos considerando los siguientes casos:

Caso 1  $k = 2m + 1$ . Claramente  $D = V(W_n^m)$  es un conjunto  $k$ -upla dominante y  $|D| = \gamma_{\times k}(W_n^m) = n = \left\lceil \frac{kn}{2m + 1} \right\rceil$ .

Caso 2  $k \leq 2m$ . Primero demostremos que cada conjunto  $k$ -upla dominante en  $W_n^m$  tiene al menos el tamaño deseado. Sea  $D$  un conjunto  $k$ -upla dominante en  $W_n^m$ . Luego en cada columna de  $A^*(W_n^m)$  hay al menos  $k$  1-entradas entre las filas asociadas con vértices en  $D$ . Así, la submatriz dada por las filas asociadas con vértices en  $D$  tiene al menos

$kn$  1-entradas. Como cada fila de esta submatriz tiene exactamente  $2m + 1$  1-entradas, está claro que  $|D| \geq \left\lceil \frac{kn}{2m + 1} \right\rceil$ . Por lo tanto,  $\gamma_{\times k}(W_n^m) \geq \left\lceil \frac{kn}{2m + 1} \right\rceil$ .

Para probar la otra desigualdad, consideremos los siguientes casos:

Caso 2.1  $r = 0$ . El resultado sigue inmediatamente de la desigualdad  $\gamma_{\times k}(W_n^m) \leq k \left\lceil \frac{n}{2m + 1} \right\rceil$  en [1].

Caso 2.2  $r \neq 0$ .

Caso 2.2.1 Si  $k = l_2$ , en este caso el resultado sigue del Lema 70.

Caso 2.2.2  $k < l_2$ . El Algoritmo 1 da como salida el conjunto  $D = \mathbf{DOM}(n, m, \langle S_1 \rangle, k)$ . Nuevamente,

$$\sum_{v \in V(W_n^m)} |N[v] \cap D| = \sum_{v \in D} |N[v]| = |D|(2m + 1).$$

Finalizada la  $k$ -ésima iteración ( $h = k$ ) del procedimiento  $\mathbf{DOM}(n, m, \langle S_1 \rangle, k)$ , los vértices de  $D$  cubrieron  $k$  veces a cada vértice de  $V(G)$ . Entonces,

$$|D|(2m + 1) = kn + r_k \quad \text{donde } 1 \leq r_k \leq 2m.$$

Así, resulta  $|D| = \frac{kn + r_k}{2m + 1}$ . No es difícil probar que  $\frac{kn + r_k}{2m + 1} = \left\lceil \frac{kn}{2m + 1} \right\rceil$ .

En efecto, ésto sigue de notar que  $\frac{kn + 1}{2m + 1} \leq \frac{kn + r_k}{2m + 1} \leq \frac{kn + 2m}{2m + 1}$ .

Caso 2.2.3  $k > l_2$ . Denotemos por  $\tilde{c}$  y  $\tilde{r}$ , el cociente y el resto respectivamente, obtenidos al realizar  $\mathbf{DIV}(k, l_2)$  y sea  $D$  la salida del Algoritmo 1,  $D = \bigcup_{i=2}^{\tilde{c}+1} S_i \cup \tilde{D}$ , donde  $\tilde{D} \subseteq S_1$  está construido por el procedimiento  $\mathbf{DOM}(n, m, \langle S_1 \rangle, \tilde{r})$  ya que  $\tilde{r} < l_2$ .

Dado  $v \in V(W_n^m)$ , por un lado la Proposición 69 implica que  $\left| N[v] \cap \bigcup_{i=2}^{\tilde{c}+1} S_i \right| = l_2 \tilde{c}$ ; por otro lado,  $\tilde{D}$  es un conjunto  $\tilde{r}$ -upla dominante ya que  $\left| N[v] \cap \tilde{D} \right| \geq \tilde{r}$ . Por lo tanto  $|N[v] \cap D| \geq l_2 \tilde{c} + \tilde{r} = k$ , es decir  $D$  es un conjunto  $k$ -upla dominante en  $W_n^m$ .

Además,

$$|D| = \left| \bigcup_{i=2}^{\tilde{c}+1} S_i \right| + \left\lceil \frac{\tilde{r}n}{2m + 1} \right\rceil = \sum_{i=2}^{\tilde{c}+1} |S_i| + \left\lceil \frac{\tilde{r}n}{2m + 1} \right\rceil = \underbrace{\tilde{c}n}_{\in \mathbb{Z}} + \left\lceil \frac{\tilde{r}n}{2m + 1} \right\rceil =$$

$$\left\lceil \frac{\tilde{c}n}{M} + \frac{\tilde{r}n}{2m+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\tilde{c}l_2n + \tilde{r}n}{2m+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{(\tilde{c}l_2 + \tilde{r})n}{2m+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{kn}{2m+1} \right\rceil.$$

□

**Corolario 77.** *Dado un grafo web  $W_n^m$  y un entero positivo  $k$  con  $k \leq 2m+1$ , el tiempo de ejecución del Algoritmo 1 es lineal y devuelve como salida un conjunto  $k$ -tupla dominante de  $W_n^m$  de tamaño mínimo.*

A continuación aplicamos los resultados obtenidos en el grafo web  $W_{15}^4$ .

**Ejemplo 78.** *EL mínimo tamaño entre todos los conjuntos  $k$ -upla dominantes de  $W_{15}^4$  para cada  $k \leq 9$  (estos son todos los valores posibles para  $k$ ) son:*

$$\begin{aligned} \bullet \gamma_{\times 1}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{15}{9} \right\rceil = 2, & \bullet \gamma_{\times 2}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{30}{9} \right\rceil = 4, & \bullet \gamma_{\times 3}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{45}{9} \right\rceil = 5, \\ \bullet \gamma_{\times 4}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{60}{9} \right\rceil = 7, & \bullet \gamma_{\times 5}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{75}{9} \right\rceil = 9, & \bullet \gamma_{\times 6}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{90}{9} \right\rceil = 10, \\ \bullet \gamma_{\times 7}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{105}{9} \right\rceil = 12, & \bullet \gamma_{\times 8}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{120}{9} \right\rceil = 14, & \bullet \gamma_{\times 9}(W_{15}^4) &= \left\lceil \frac{135}{9} \right\rceil = 15. \end{aligned}$$

Podemos completar nuestro ejemplo obteniendo del Algoritmo 1, los conjuntos  $k$ -upla dominantes mínimos, para cada  $k = 1, \dots, 9$ .

$k$	$D$	conjunto $k$ -upla dominante mínimo
1	{1, 10}	{ $v_5, v_{14}$ }
2	{1, 10, 4, 13}	{ $v_5, v_{14}, v_8, v_2$ }
3	{1, 10, 4, 13, 7}	{ $v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}$ }
4	{1, 10, 4, 13, 7, 2, 11}	{ $v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}$ }
5	{1, 10, 4, 13, 7, 2, 11, 5, 14}	{ $v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}, v_9, v_3$ }
6	{1, 10, 4, 13, 7, 2, 11, 5, 14, 8}	{ $v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}, v_9, v_3, v_{12}$ }
7	{1, 10, 4, 13, 7, 2, 11, 5, 14, 8, 3, 12}	{ $v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}, v_9, v_3, v_{12}, v_7, v_1$ }
8	{1, 10, 4, 13, 7, 2, 11, 5, 14, 8, 3, 12, 6, 15}	{ $v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}, v_9, v_3, v_{12}, v_7, v_1, v_{10}, v_4$ }
9	[1, 15]	$V(W_{15}^4)$



## Capítulo 5

### Conclusiones finales y perspectivas



---

Para los problemas de  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total abordados en el Capítulo 2 de esta tesis, en comparación con el enfoque de Bertossi (para  $k = 1$ ) para grafos de intervalos *generales*, nuestro enfoque explota la estructura adicional de los grafos de intervalos *proprios* para obtener una generalidad en el espacio del problema. Éste funciona para todo  $k$  y es más directo, en el sentido de que el problema de  $k$ -dominación (usual o total, no ponderado o ponderado) en un grafo de intervalos propios dado se reduce al cálculo de un camino más corto en un grafo acíclico dirigido ponderado en un solo paso unificado. Bertossi en cambio lo realizó en dos pasos ya que mostró cómo reducir el problema de 1-dominación total en un grafo de intervalos dado a un cálculo de un camino más corto en cierto grafo acíclico dirigido ponderado por arcos pero que satisface algunas restricciones adicionales en pares de arcos consecutivos. Luego, en un segundo paso, con una transformación adicional reduce el problema a un cálculo de camino más corto habitual (sin restricciones en los arcos). Por otra parte, el Capítulo 2 deja abiertas varias preguntas. Aunque nuestros algoritmos son polinomiales para cada  $k$  fijo, la pregunta principal es si se puede evitar la dependencia de  $k$  en el orden. Una pregunta relacionada es si otros problemas mencionados en este capítulo ( $M$ -dominación y  $M$ -dominación total [41, 38, 23, 49]), problemas que generalizan la  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total al permitir que  $k$  sea parte de la entrada, se pueden resolver también en tiempo polinomial para grafos de intervalos propios. También sería interesante determinar la complejidad de estos problemas en generalizaciones de grafos de intervalos propios, como grafos fuertemente cordales, grafos arco-circulares, grafos de cocomparabilidad y grafos libres de AT, entre otros.

Respecto de los resultados desarrollados en el Capítulo 3, nuestro algoritmo resuelve el problema de la  $k$ -upla dominación para un número acotado de valores de  $k$ , dependiente del grafo de entrada. Dado un grafo co-biconvexo  $G$  con partición  $(C_1, C_2)$  de  $V(G)$ , el algoritmo presentado se basa en la búsqueda de conjuntos estables *máximos* en los grafos de intervalos que se definen a partir de la partición  $(C_1, C_2)$ . Con esos conjuntos estables se puede resolver con optimalidad el problema de la 2-upla dominación y de la 3-upla dominación en  $G$  y de allí, los problemas de  $k$ -upla dominación para todo  $k \leq |\mathcal{U}(G)| + 3$ , siendo  $\mathcal{U}(G)$  el conjunto de los vértices universales de  $G$ . Para trabajar con otros valores de  $k$ , es necesario otro tratamiento ya que no fue posible independizarnos del conjunto estable que el algoritmo elige en cada iteración (conjuntos estables máximos distintos conducen a conjuntos  $k$ -upla dominantes que pueden o no ser mínimos).

Respecto de los resultados obtenidos y mostrados en el Capítulo 4 de esta tesis, resolvimos eficientemente para todo valor de  $k$ , el problema de la  $k$ -upla dominación en la clase de grafos web, una subclase bien conocida de grafos arco-circulares. De esta forma, completamos el estudio de Argiroffo et al. en [1] donde el problema ya se había resuelto para cualquier grafo web  $W_n^m$ , pero solo para los casos  $k = 2$  y  $k = 2m$ . Tenemos una fuerte intuición de que con una pequeña modificación del enfoque dado en este capítulo, se puede también hallar la solución de los problemas de  $k$ -dominación y  $k$ -dominación total en la clase de los grafos web.

Por otro lado, sería interesante imitar el enfoque dado en este capítulo para estudiar el o los problemas abordados en la subclase de grafos arco-circulares dados por los grafos concave-round, siendo éstos caracterizados por la propiedad de los 1's circulares por columnas que satisfacen sus matrices de adyacencia ampliada.

Los interrogantes planteados y tal vez otros por plantearse que no hayamos mencionado aquí, abren la posibilidad de abordar nuevas técnicas de tratamiento.

# Bibliografía

- [1] G. Argiroffo, M. Escalante, M.E. Ugarte, *On the  $k$ -dominating set polytope of web graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **36** (2010) 1161–1168.
- [2] G. Argiroffo, V. Leoni, P. Torres, *Complexity of  $k$ -tuple total and total  $\{k\}$ -dominations for some subclasses of bipartite graphs*, Information Processing Letters, **138** (2018) 75–80.
- [3] G. Argiroffo, V. Leoni, P. Torres, *On the complexity of  $\{k\}$ -domination and  $k$ -tuple domination in graphs*, Information Processing Letters, **115**, 6-8 (2015) 556–561.
- [4] D. Bakhshesh, M. Farshi, M. Hasheminezhad, *Complexity results for  $k$ -domination and  $\alpha$ -domination problems and their variants* (2017) arXiv:1702.00533 [cs.CC].
- [5] R. Belmonte, M. Vatshelle, *Graph classes with structured neighborhoods and algorithmic applications*, Theoretical Computer Science, **511** (2013) 54–65.
- [6] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Collection Universitaire de Mathématiques, **II** Dunod, Paris (1958) viii 277.
- [7] A. Bertossi, *Total domination in interval graphs*, Inform. Process. Lett., **23** (1986) 3, 131–134.
- [8] A. Brandstädt, V.D. Chepoi, F.F. Dragan, *The algorithmic use of hypertree structure and maximum neighbourhood orderings*, Discrete Appl. Math., **82**, 1-3 (1998) 43-77.
- [9] K.S Booth, G.S Lueker, *Testing for the Consecutive Ones Property, Interval Graphs, and Graph Planarity Using PQ-Tree Algorithms*, Journal of Computer and System Sciences **13** (1976) 335-379.
- [10] A. Braga, C.C. de Souza, O. Lee, *The eternal dominating set problem for proper interval graphs*, Inform. Process. Lett., **115** 6-8 (2015) 582–587.
- [11] B. Brešar, T. Gologranc, T. Kos, *Dominating sequences under atomic changes with applications in Sierpiński and interval graphs*, Appl. Anal. Discrete Math., **10** 2 (2016) 518–531.

- [12] B.-M.Bui-Xuan, J.A Telle, M. Vatshelle, *Fast dynamic programming for locally checkable vertex subset and vertex partitioning problems*, Theoret. Comput. Sci., **511** (2013) 66–76.
- [13] D. Cattaneo, S. Perdrix, *The parameterized complexity of domination-type problems and application to linear codes*, *Theory and applications of models of computation*, Lecture Notes in Comput. Sci., **8402** (2014) 86–103.
- [14] M.S. Chang, *Efficient algorithms for the domination problems on interval and circular-arc graphs*, SIAM J. Comput., **27** 6 (1998) 1671–1694.
- [15] G.J. Chang, *Labeling algorithms for domination problems in sun-free chordal graphs*, Discrete Appl. Math., **22** 1 (1988/89) 21–34.
- [16] G.J Chang, C. Pandu Rangan, S.R. Coorg, *Weighted independent perfect domination on cocomparability graphs*, Discrete Appl. Math., **63** 3 (1995) 215–222.
- [17] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg, L.Volkman, *k-domination and k-independence in graphs: a survey*, Graphs Combin., **28** 1 (2012) 1–55.
- [18] M. Chellali, N. Meddah, *Trees with equal 2-domination and 2-independence numbers*, Discuss. Math. Graph Theory, **32** 2 (2012) 263–270.
- [19] T.C.E. Cheng, L.Y. Kang, C.T. Ng, *Paired domination on interval and circular-arc graphs*, Discrete Appl. Math., **155** 16 (2007) 2077–2086.
- [20] N. Chiarelli, T. R. Hartinger, V. A. Leoni, M. I. Lopez Pujato, M. Milanic, *New algorithms for weighted k-domination and total k-domination problems in proper interval graphs*, Theoretical Computer Science, **795** (2019) 128–141.
- [21] N. Chiarelli, T.R. Hartinger, V.A. Leoni, M.I. Lopez Pujato, and M. Milanic, *Improved algorithms for k-domination and total k-domination in proper interval graphs*, Lecture notes in Computer Science, **10856** (2018) 290–302.
- [22] F. Cicalese, G. Cordasco, L. Gargano, M. Milanič, U. Vaccaro, *Latency-bounded target set selection in social networks*, Theoret. Comput. Sci., **535** (2014) 1–15.
- [23] F. Cicalese, M. Milanič, U. Vaccaro, *On the approximability and exact algorithms for vector domination and related problems in graphs*, Discrete Appl. Math. **161** (2013) 750–767.
- [24] S. A. Cook, “The complexity of theorem-proving procedures”. In Proc. 3rd /Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, New York, Association for Computing Machinery, (1971) 151–158.

- [25] D.G. Corneil, *A simple 3-sweep LBFS algorithm for the recognition of unit interval graphs*, Discrete Appl. Math., **138** 3 (2004) 371–379.
- [26] B. Courcelle, J.A. Makowsky, U. Rotics, *Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width*, Theory Comput. Syst., **33** 2 (2000) 125–150.
- [27] E. DeLaViña, W. Goddard, M.A Henning, R. Pepper, E.R. Vaughan, *Bounds on the  $k$ -domination number of a graph*, Appl. Math. Lett., **24** 6 (2011) 996–998.
- [28] E. W. Dijkstra, *A note on two problems in connexion with graphs*, Numerische Mathematik 1, (1959) 269–271.
- [29] M.P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini, *The Limited Packing and Tuple Domination problems in graphs*, Inform. Process. Lett. **111** (2011) 1108–1113.
- [30] M.P. Dobson, V. Leoni, M.I. Lopez Pujato, *Tuple domination on graphs with the consecutive-zeros property*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science **346** (2019) 401–411.
- [31] G. Duran, A. Gravano, R.M. McConnell, J. Spinrad, A. Tucker, *Polynomial time recognition of unit circular arc graphs*, Journal of Algorithms **58**, 1 (2006) 67–78.
- [32] M. Farber, *Independent domination in chordal graphs*, Oper. Res. Lett., **1** 4 (1981/82) 134–138.
- [33] O. Favaron, A. Hansberg, L. Volkmann, *On  $k$ -domination and minimum degree in graphs*, J. Graph Theory, Journal of Graph Theory, **57** 1 (2008) 33–40.
- [34] J.F. Fink, M.S. Jacobson,  *$n$ -domination in graphs*, Wiley-Intersci. Publ, Wiley, New York, (1985) 283–300.
- [35] D.R. Fulkerson, O.A. Gross, *Incidence matrices and interval graphs*, Pacific J. Math., **15** (1965) 835–855.
- [36] M. Garey, D. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, Macmillan Higher Education, (1979).
- [37] F. Gavril, *The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs*, J. Comb. Theory (B)., **16** (1974) 47–56.
- [38] T. Gerlach, J. Harant, *A note on domination in bipartite graphs*, Discuss. Math. Graph Theory, **22** 2 (2002) 229–231.
- [39] M. C. Golumbic, U. Rotics, *On the clique-width of perfect graph classes*, Proceedings. Berlin: Springer. Lect. Notes Comput. Sci., **1665** (1999) 135–147.

- [40] A. Hansberg, R. Pepper, *On  $k$ -domination and  $j$ -independence in graphs*, Discrete Appl. Math., **161** 10-11 (2013) 1472–1480.
- [41] Harant, Jochen and Pruchnewski, Anja and Voigt, Margit, *On dominating sets and independent sets of graphs*, Combin. Probab. Comput., **8** 6 (1999) 547–553.
- [42] F. Harary, T.W. Haynes, *Double domination in graphs*, Ars Combin., **55** (2000) 201–213.
- [43] T.W. Haynes, S.T Hedetniemi, P.J Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **208** (1998).
- [44] T.W. Haynes, S.T Hedetniemi, P.J Slater, *Domination in graphs. Advanced topics*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York **209** (1998) xiv+497.
- [45] M.A. Henning, A.P. Kazemi,  *$k$ -tuple total domination in graphs*, Discrete Appl. Math., **158** 9 (2010) 1006–1011.
- [46] C. de Figueiredo, J. Meidanis, C.P. de Mello, *A linear time algorithm for proper interval graph recognition*, Inform. Process. Lett. textbf56 3 (1995) 179–184.
- [47] W.L. Hsu, K.H. Tsai, *Linear time algorithms on circular-arc graphs*, Inform. Process. Lett., **40** 3 (1991) 123–129.
- [48] T. Ishii, H. Ono, Hiroataka, and Y. Uno, *Subexponential fixed-parameter algorithms for partial vector domination*, Discrete Optim., **22** part A (2016) 111–121.
- [49] T. Ishii, H. Ono, and Y. Uno, *(Total) vector domination for graphs with bounded branch-width*, Discrete Appl. Math., **207** (2016) 80–89.
- [50] M.S. Jacobson, K. Peters, *Complexity questions for  $n$ -domination and related parameters*, Eighteenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Winnipeg, MB, 1988), Congr. Numer., **68** (1989) 7–22.
- [51] A.P Kazemi, *On the total  $k$ -domination number of graphs*, Discuss. Math. Graph Theory, **32** 3 (2012) 419–426.
- [52] Keil, J. Mark, *Total domination in interval graphs*, Inform. Process. Lett., **22** 4 (1986) 171–174.
- [53] V. Klee, *What are the intersection graphs of arcs in a circle?* Amer. Math. Monthly, **76** 7 (1969) 810–813.
- [54] V.R. Kulli, , *On  $n$ -total domination number in graphs*, Graph theory, combinatorics, algorithms, and applications (San Francisco, CA, 1989) (1991) 319–324.

- [55] J.K. Lan, G.J. Chang, *Algorithmic aspects of the  $k$ -domination problem in graphs*, Discrete Appl. Math., **161** 10-11 (2013) 1513–1520.
- [56] J.K. Lan, G.J. Chang, *On the algorithmic complexity of  $k$ -tuple total domination*, Discrete Appl. Math., **174** (2014) 81–91.
- [57] C.-M. Lee, M.-S. Chang, *Variations of  $Y$ -dominating functions on graphs*, Discrete Math., **308** 18 (2008) 4185–4204.
- [58] C.S. Liao, G. J. Chang,  *$k$ -tuple domination in graphs*, Inform. Process. Lett., **87** 1 (2003) 45–50.
- [59] Liao, Chung-Shou and Lee, D. T., *Power domination in circular-arc graphs*, Algorithmica, **65** 2 (2013) 443–466.
- [60] M. Liedloff, T. Kloks, J. Liu, S.-L. Peng, *Efficient algorithms for Roman domination on some classes of graphs*, Discrete Appl. Math., **156** 18 (2008) 3400–3415.
- [61] M. C. Lin, J. L. Szwarcfiter, *Characterizations and linear time recognition of Helly circular-arc graphs*, Proceedings of the twelfth Annual International Conference on Computing and Combinatorics (COCOON'06), Lecture Notes in Computer Science, **4112** (2006) 73–82.
- [62] M. C. Lin, J. L. Szwarcfiter, *Characterizations and recognition of circular-arc graphs and subclasses: A survey*, Discrete Mathematics, **309** 18 (2009) 5618–5635.
- [63] Lin, Chiou-Jiun and Liu, Jia-Jie and Wang, Yue-Li, *Finding outer-connected dominating sets in interval graphs*, Inform. Process. Lett., **115** 12 (2015) 917–922.
- [64] R. Mc Connell, *Linear-time recognition of circular-arc graphs*, Algorithmica, **37** (2003) 93–47.
- [65] S-i. Oum, P. Seymour, *Approximating clique-width and branch-width*, J. Combin. Theory Ser. B, **96** 4 (2006) 514–528.
- [66] B.S. Panda, S. Paul, *A linear time algorithm for liar's domination problem in proper interval graphs*, Inform. Process. Lett., **113** 19-21 (2013) 815–822.
- [67] B.S. Panda, and Pradhan, D., *A linear time algorithm to compute a minimum restrained dominating set in proper interval graphs*, Discrete Math. Algorithms Appl., **7** 2 (2015) 1550020, 21.
- [68] D. Pradhan, *Algorithmic aspects of  $k$ -tuple total domination in graphs*, Inform. Process. Lett., **112** 21 ( 2012) 816–822.

- [69] G. Ramalingam, C. Pandu Rangan, *A unified approach to domination problems on interval graphs*, Inform. Process. Lett., **27** 5 (1988) 271–274.
- [70] G. Ramalingam, C. Pandu Rangan, *Total domination in interval graphs revisited*, Inform. Process. Lett., **27** 1 (1988) 17–21.
- [71] F. Roberts, *Indifference graphs*, in: Proof Techniques in Graph Theory, Proc. Second Ann Arbor Graph Theory Conf., Ann Arbor, Mich., (1968), Academic Press New York, (1969), 139–146.
- [72] M. D. Safe, *Characterization and linear-time detection of minimal obstructions to concave-round graphs and the circular-ones property*, Journal of Graph Theory **93** 2 (2020) 268–298.
- [73] Ch. Papamantou, *Depth First Search and Directed Acyclic Graphs*, (2004) 12–14.
- [74] L.E. Trotter, *A class of facet producing graphs for vertex packing polyhedra*, Discrete Mathematics, **12** (1975) 373–388.
- [75] A. Tucker, *A. Matrix characterizations of circular-arc graphs*, In: Pacific J. Math., **39.2** (1971) 535–545.
- [76] A. Tucker, *A structure theorem for the consecutive 1's property*, J. Combin. Theory Ser. B, **12** 2 (1972) 153–162.
- [77] D.B. West, *Introduction to Graph Theory (second edition)*, Prentice Hall, (2001).

# Índice alfabético

- 1-contigüidad, 100
- algoritmo
  - correcto, 38
  - orden o tiempo de ejecución, 38
- arcos
  - de un digrafo, 30
- clase de equivalencia, mod  $n$ , 96
- clique, 29
  - máxima, 29
  - maximal, 29
- congruencia módulo  $m$ , 96
- conjunto
  - $M$ -dominante, 52
  - $k$ -dominante, 46
  - $k$ -upla dominante, 40
  - dominante, 36, 39
  - dominante total, 43
  - estable, 30
  - $k$ -dominación total, 44
- cuerda, 30
- digrafo, 30
  - acíclico, 30
  - camino camino dirigido, 30
  - ciclo dirigido, 30
  - ponderado, 30
  - simple, 30
- distancia
  - entre dos vértices, 30
- dominación
  - total, 43
- función
  - de complejidad, 38
  - longitud en un digrafo, 30
- grado, 29
  - máximo, 29
  - mínimo, 29
- grafo, 29
  - arco-circular, 32
  - arco-circular Helly, 32
  - biconvexo, 32
  - bipartito, 31
  - camino, 30
  - ciclo, 30
  - co-biconvexo, 33
  - completo, 31
  - concave-round, 32
  - conexo, 30
  - convexo sobre un conjunto de vértices, 32
  - cordal, 31
  - de intersección, 31
  - de intervalos, 31
  - de intervalos propios, 31
  - fuertemente cordal, 31
  - simple, 29
  - trivial, 29
  - web, 32
- longitud
  - de un camino, 30
  - de un camino dirigido ponderado, 30
  - un arco en un digrafo, 30
- matriz

- con la propiedad de 0's consecutivos por columnas, 34
- con la propiedad de 1's circulares por columnas, 34
- con la propiedad de 1's consecutivos por columnas, 34
- de adyacencia, 34
- de adyacencia ampliada, 34
- modelo
  - arco-circular de un grafo, 32
  - de intersección, 31
  - de intervalos, 31
  - de intervalos propios de un grafo, 31
- número
  - de  $k$ -dominación, 47
  - de  $k$ -dominación total, 45
  - de  $k$ -upla dominacion, 40
  - de 1-dominación total, 43
  - de estabilidad, 30
- nodo
  - de un digrafo, 30
- orden
  - de eliminación fuerte, 31
  - de un grafo, 29
- problema
  - de 1-dominación total, 43
  - de decisión, 36
  - de dominación, 36
  - de la  $k$ -dominación, 47
  - de la  $k$ -dominación total, 44
  - de la 1-upla dominación, 39
  - de la  $k$ -dominación ponderada, 71
  - de la  $k$ -dominación total ponderada, 71
  - del camino más corto, 36
  - NP-completo, 37
  - Polinomial, 37
- propiedad Helly, 32
- reducción entre problemas de decisión, 37
- subgrafo inducido, 29
- vértice
  - adyacente, 29
  - simple, 29
  - universal, 29
- vecindad
  - cerrada, 29
  - vecindad(abierta), 29