

ESTUDIO DE UNA CLASE DE POLINOMIOS DE BERNOULLI

POR

MISCHA COTLAR

En esta nota estudiaremos algunas propiedades de cierta sucesión de polinomios $\{g_n(x)\}$ que pueden definirse (Ver § 5) como los numeradores de las reducidas sucesivas de la fracción continua

$$x + \frac{1}{(x+1)+} \frac{2}{(x+2)+} \cdots \frac{n-1}{(x+n-1)+} \cdots;$$

igualmente trataremos de otra sucesión $\{M_n(x)\}$ que a la antedicha se vincula íntimamente.

Dichas propiedades, además de ser interesantes en sí, nos permitirán deducir, en un artículo próximo, con método uniforme, diversas congruencias de los números de Bernoulli (Ver § 1), entre ellas relaciones clásicas.

Para r entero y positivo $g_n(r) = f_n^r$ y $g_n(0) = f_n$ son precisamente los números estudiados en un artículo anterior ⁽¹⁾; ahora en cambio, nos ocuparemos del comportamiento de $g_n(r)$ para valores enteros negativos de r . Para tales valores de r la sucesión $\{g_n(r)\}$ presenta una notable propiedad de *permutabilidad* entre el índice n y el argumento r ; más aún, los $g_n(x)$ y los $M_n(x)$ son los únicos polinomios de Bernoulli de interpolación que gozan de esta propiedad. Antes de empezar el estudio de los polinomios $g_n(x)$ daremos en los tres primeros párrafos las nociones necesarias de los polinomios de Bernoulli.

⁽¹⁾ M. COTLAR. *Una generalización de los factoriales*. Math. Notae. Año V, p. 89. La lectura de la presente nota puede sin embargo hacerse sin ninguna referencia a la anterior.

§ 1. En muchos desarrollos del Análisis se presentan los números y los polinomios de Bernoulli, que gozan de propiedades muy notables; los números de Bernoulli se definen por la ley recurrente

$$B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, \quad (1)$$

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n+1}^i B_i \quad (n > 1)$$

Es fácil ver que se tiene⁽²⁾

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}. \quad (2)$$

Se tiene pues: $B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$, $B_3=0$, $B_4=-1/30$, $B_5=0$, $B_6=1/42$,

Los polinomios de Bernoulli se definen por ⁽³⁾

⁽²⁾ En efecto, si escribimos formalmente la (2) con coeficientes B_n indeterminados, sustituyendo luego en la identidad

$$e^t \frac{t}{e^t-1} = t + \frac{t}{e^t-1}$$

e igualando los coeficientes de t^{n+1} en los dos miembros se obtiene, para $n > 1$,

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i B_i$$

que equivale a la correspondiente (1). Si además la anterior identidad se escribe en la forma

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{e^t-1} = -\frac{t}{2} + \frac{e^t t}{e^t-1} = -\frac{t}{2} + \frac{t}{1-e^{-t}} = \frac{-t}{2} + \frac{-t}{e^{-t}-1}$$

se obtiene que

$$B_{2n+1} = 0 \quad \text{para } n \geq 1.$$

⁽³⁾ La terminología y el simbolismo relativo a los polinomios de Bernoulli — a diferencia de los propios números de Bernoulli — no es constante en la literatura, aunque el problema sea siempre el de expresar una función que, para valores enteros de la variable x , representa la suma de potencias semejantes de los sucesivos enteros $\leq x$. Frecuentemente se ha usado simple-

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n C_i^n B_{n-i} x^i \quad (3)$$

de modo que en virtud de (2) se tiene

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (4)$$

Los números y polinomios de Bernoulli fueron introducidos por Jacobo Bernoulli al proponerse calcular la suma de las n -imas potencias de los primeros k números enteros: $0^n + 1^n + \dots + (k-1)^n$. Llamando $F(x;t)$ la función que figura en el miembro izquierdo de (4), es $F(x+1;t) - F(x;t) = te^{xt}$ e igualando los coeficientes en t^{n+1} de los desarrollos respectivos, se obtiene

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n; \quad (5)$$

haciendo en (5) $x=0, 1, \dots, (k-1)$ y sumando, resulta la fórmula de Bernoulli

mente el signo S , poniendo

$$S_{n+1}(x) = 1 + 2^n + 3^n + \dots + (x-1)^n$$

de donde

$$S_{n+1}(x+1) - S_{n+1}(x) = x^n,$$

igualdad que, salvo el cambio de S por B y la aparición de un factor numérico, coincide con (5). El símbolo $B(x)$ parece haya sido introducido por Malmstén (1847) y luego por Raabe (1851) para indicar una función ligeramente transformada respecto de la anterior, que aquí no importa puntualizar. En el libro de NIELS NIELSEN: *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli* (Paris - Gauthier - Villars - 1923) que el lector puede consultar con provecho por referencias históricas, bibliográficas, etc., se usa el símbolo B para la función que realiza la condición

$$B_{n+1}(x) - B_{n+1}(x-1) = \frac{x^n}{n!},$$

donde se ve que, sin diferenciarse en lo esencial de la función del texto, resulta todavía aplicada una ligera transformación. El lector debe tener en cuenta estas diferencias para no incurrir en identificaciones equivocadas.

$$\frac{1}{n+1} [B_{n+1}(k) - B_{n+1}(0)] = 0^n + 1^n + \dots + (k-1)^n. \quad (6)$$

De (4) se obtienen fácilmente las dos fórmulas fundamentales

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = n B_{n-1}(x) \quad (7)$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \quad (\text{Jacobi}). \quad (8)$$

Poniendo, como de costumbre,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \Delta^i = \Delta(\Delta^{i-1}), \quad (9)$$

el problema de hallar una función $F(x)$ tal que $\Delta F(x) = P(x)$, siendo $P(x)$ dada, tiene una evidente analogía con el problema de la integración; acostumbra por eso representar la correspondiente operación con el símbolo

$$\Sigma_a^x \text{ como análogo de } \int_a^x,$$

de manera que la $F(x)$ que toma el valor 0 para $x=0$ podrá indicarse con

$$F_0(x) = \Sigma_0^x P(x)$$

donde el símbolo Σ tiene evidentemente significado muy distinto del ordinario signo de suma, aunque una analogía exista por el hecho que, para $x=k$ entero, será evidentemente

$$F(k) - F(0) = \sum_{x=0}^{x=k-1} P(x)$$

donde se entiende, en el segundo miembro, que la x toma únicamente valores enteros.

Las funciones bernoullianas resuelven pues la ecuación

$$\Delta F(x) = x^n$$

por cuanto, con el simbolismo anterior, podrá escribirse la (5) en la forma

$$\sum_0^x x^n = \frac{1}{n+1} B_{n+1}(x); \quad (5a)$$

Con transformaciones algebraicas elementales se deduce de (3) y (5a) la siguiente fórmula de Euler que resuelve el problema de determinar la $F_0(x)$ para $P(x) = P_n(x)$, polinomio de grado n :

$$\sum_0^x P_n(x) = \int_0^x P_n(x) dx + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{i!} [P_n^{(i-1)}(x) - P_n^{(i-1)}(0)]. \quad (10)$$

Los polinomios $B_n(x)$ están estrechamente vinculados a los factoriales

$$\sigma_n(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-(n-1)); \quad (11)$$

en efecto, se tiene evidentemente

$$\Delta \sigma_n(x) = n \sigma_{n-1}(x), \quad \sum_0^x \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sigma_{n+1}(x), \quad (12)$$

y por la conocida fórmula de interpolación de Newton

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \Delta P_n(0) \frac{\sigma_i(x)}{i!}; \quad (13)$$

luego de (12) y (13) resulta la fórmula

$$\sum_0^x P_n(x) = \sum_{i=0}^n \Delta P_n(0) \frac{\sigma_{i+1}(x)}{(i+1)!} \quad (14)$$

que, para $P_n(x) = x^n$, da la relación

$$\frac{1}{n+1} [B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)] = \sum_{i=0}^n \Delta(0^n) \frac{\sigma_{i+1}(x)}{(i+1)!}. \quad (14a)$$

§ 2. La operación $\Delta f(x)$ y su correlativa $Df(x) = f'(x)$ están ambas incluídas en la

$$\Delta_{\omega} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}; \quad \Delta_{\omega}^i = \Delta_{\omega} \left(\Delta_{\omega}^{i-1} \right), \quad (15)$$

que para $\omega=1$, y $\omega=0$ se reduce a Δ y D respectivamente. La sucesión $\{\sigma_n(x; \omega)\}$,

$$\sigma_n(x; \omega) = x(x-\omega) \dots (x-(n-1)\omega), \quad (16)$$

se reduce para $\omega=1, 0$ a $\{\sigma_n(x)\}$ y $\{x^n\}$; la fórmula de interpolación

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \Delta_{\omega}^i P_n(0) \frac{\sigma_i(x; \omega)}{i!} \quad (17)$$

se reduce para $\omega=1, 0$ a las de Newton y Maclaurin. La sucesión $\{\sigma_n(x; \omega)\}$ está perfectamente definida por las ecuaciones

$$\sigma_n(0; \omega) = 0, \quad \Delta_{\omega} \sigma_n(x; \omega) = n \sigma_{n-1}(x; \omega) \quad (18)$$

(supuesto $n > 0$, $\sigma_0(x; \omega) = 1$). Esto sugiere la siguiente definición (introducida por Appell): diremos que una sucesión $\{\lambda_n(x)\}$ es armónica Δ_{ω} si $\lambda_n(x)$ es un polinomio de grado n y $\Delta_{\omega} \lambda_n(x) = n \lambda_{n-1}(x)$. Elegiendo una sucesión numérica $\{a_n\}$ arbitraria, que genéricamente designaremos con $\langle a \rangle$, y poniendo

$$\sigma_n(x; \omega | \{a_n\}) = \sigma_n(x; \omega | \langle a \rangle) = \sum_{i=0}^n C_n^i a_{n-i} \sigma_i(x; \omega) \quad (19)$$

resulta de (18) que la sucesión (19) es armónica Δ_{ω} ; un momento de reflexión muestra que toda otra sucesión armónica Δ_{ω} es de la forma (19), de modo que variando la sucesión paramétrica $\langle a \rangle$ se obtienen las posibles sucesiones armónicas; $\langle a \rangle$ recibe el nombre de base de la sucesión armónica. La sucesión $\{\sigma_n(x)\}$ es armónica $\Delta = \Delta_1$, $\{x^n\}$ y $\{B_n(x)\}$ son armónicas $D = \Delta_0$ (ver 7)); de modo que los polinomios (19) comprenden a los de Bernoulli y a los factoriales:

$$B_n(x) = \sigma_n(x; 0 | [B_n]); \quad \sigma_n(x; \omega) = \sigma_n(x; \omega | [1, 0, 0, \dots]).$$

La teoría de los polinomios de Bernoulli está pues incluida dentro de la teoría general de las sucesiones armónicas. El estudio de las sucesiones armónicas $\{\lambda_n(x)\}$ es especialmente interesante si cada polinomio $\lambda_n(x)$ es *simétrico* es decir verifica la ecuación: $\lambda_n(1-x) = (-1)^n \lambda_n(x)$; así los polinomios $B_n(x)$ forman una sucesión armónica D y simétrica (ver (8)). Enviando para el estudio detallado de las sucesiones simétricas al tratado de N. Nielsen pasemos a una importante generalización de las sucesiones armónicas, introducida por Nörlund y R. Lagrange⁽⁴⁾.

§ 3. En este párrafo resumiremos rápidamente la memoria citada de R. Lagrange, en forma algo diferente de aquel autor, pero más conveniente para nuestros fines; lo haremos por el método de las funciones generatrices, usando las leyes del cálculo simbólico⁽⁵⁾. A toda sucesión numérica $\{a_n\}$ o funcional $\{a_n(x)\}$, haremos corresponder las series *formales*

$$A(t) \cong \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \quad \text{o} \quad A(t; x) \cong \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (20)$$

y designaremos genéricamente dichas sucesiones con $\{a_n\} = \langle a \rangle = \langle A(t) \rangle$, $\{a_n(x)\} = \langle a(x) \rangle = \langle A(t; x) \rangle$. Así por ejemplo escribiremos:

$$\langle t \rangle = \{0, 1, 0, 0, \dots\} \quad \langle 1 \rangle = \{1, 0, 0, \dots\} \quad (20a)$$

$$\langle e^t \rangle = \{1, 1, 1, \dots\} \quad (20b)$$

$$\langle t: (e^t - 1) \rangle = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\} \quad (20c)$$

$$\langle e^{xt} \rangle = \{x^n\} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \quad (20d)$$

$$\langle (1 + \omega t)^{x: \omega} \rangle = \{c^n(x; \omega)\} = \{1, x, x(x - \omega), \dots\}. \quad (20e)$$

(4) R. LAGRANGE, *Memoire sur les suites de polynomes*. Acta Mathematica, 51, 1928, pág. 201-309.

(5) Nuestras definiciones difieren ligeramente de las de R. Lagrange; para obtener estas últimas hay que reemplazar toda sucesión numérica o funcional $\{a_n\}$ por la $\{a_n: n!\}$. Esta modificación es esencial para lo que sigue y más de acuerdo con las notaciones clásicas.

El radio de convergencia de la serie (20) puede ser nulo, pero como ella es tan sólo un símbolo genérico de la sucesión de los coeficientes, podemos efectuar formalmente toda clase de operaciones analíticas como si se tratara de funciones analíticas, sin preocuparnos de la convergencia de la serie; de modo que toda operación sobre la función $A(t)$ es un *símbolo* de una operación sobre la sucesión $\{a_n\}$. Así, dadas dos sucesiones (numéricas o funcionales) $\{a_n\} = \langle a \rangle = \langle A(t) \rangle$, $\{b_n\} = \langle b \rangle = \langle B(t) \rangle$, indicaremos con $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle A(t) \rangle \cdot \langle B(t) \rangle$ la sucesión $\{c_n\} = \langle c \rangle = \langle C(t) \rangle$ tal que $C(t) = A(t) \cdot B(t)$, esto es

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{c_n\} \quad \text{significa} \quad c_n = \sum_{i=0}^n C_n^i a_i b_{n-i}. \quad (21)$$

Análogamente $\{a_n\}^r = \{c_n\}$ significa $C(t) = [A(t)]^r$; $\{a_n\}^{(r)} = \langle a \rangle^{(r)} = \langle c \rangle$ significa $C(t) = A^{(r)}(t)$; en particular para $r=1$ se tiene $\{a_n\}' = \langle a \rangle' = \{c_n\}$ con $c_n = a_{n+1}$. Con esta notación el binomio de Newton se escribe (ver (20d)):

$$\{(x+y)^n\} = \{x^n\} \cdot \{y^n\} \quad \text{pues} \quad e^{(x+y)t} = e^{xt} e^{yt}. \quad (21a)$$

Más generalmente, como $(1 + \omega t)^{(x+y):\omega} = (1 + \omega t)^{x:\omega} \cdot (1 + \omega t)^{y:\omega}$ se obtiene de (20e):

$$\{\sigma_n(x+y;\omega)\} = \{\sigma_n(x;\omega)\} \cdot \{\sigma_n(y;\omega)\}. \quad (21b)$$

Análogamente de (19) y (20e) resulta

$$\{\sigma_n(x;\omega | \langle a \rangle)\} = \{\sigma_n(x;\omega)\} \cdot \langle a \rangle = \langle (1 + \omega t)^{x/\omega} A(t) \rangle. \quad (21c)$$

La fórmula (21b) sugiere considerar la ecuación funcional

$$\{P_n(x+y)\} = \{P_n(x)\} \cdot \{P_n(y)\} \quad (22)$$

que significa

$$P_n(x+y) = \sum_{i=0}^n C_n^i P_i(x) \cdot P_{n-i}(y), \quad (22a)$$

siendo $P_n(x)$ un polinomio de grado n . R. Lagrange llama

sucesión de interpolación a toda sucesión $\{P_n(x)\}$ solución de (22). Para obtener la solución general de (22) basta observar que poniendo

$$P(t; x) \cong \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (23)$$

es $P(0; x) = 1$ (ya que (22) implica $P_0(x) = 1$) y (22) equivale simbólicamente a la ecuación

$$P(t; x+y) = P(t; x) \cdot P(t; y), \quad P(0; x) = 1$$

cuya solución general, como se sabe, es

$$P(t; x) = e^{xtP(t)}, \quad P(t) \cong \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{t^n}{n!} \quad (24)$$

siendo $\{p_n\}$ una sucesión arbitraria. R. Lagrange da a esta solución una forma más conveniente para la aplicación del operador Δ . En efecto, como

$$\Delta_{\omega} P(t; x) = e^{xtP(t)} \frac{e^{\omega t P(t)} - 1}{\omega} = P(t; x) \cdot \frac{e^{\omega t P(t)} - 1}{\omega},$$

conviene poner

$$A(t) = \frac{e^{\omega t P(t)} - 1}{\omega t} \cong \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \cong \langle a \rangle = \{a_n\} \quad (25)$$

y tendremos

$$P(t; x) = (1 + \omega t A(t))^{x/\omega} \quad (24a)$$

$$\Delta_{\omega} P(t; x) = P(t; x) \cdot t A(t) \quad (24b)$$

$$[\Delta_{\omega} P_n(x)] = [P_n(x)] \cdot \langle t A(t) \rangle = [P_n(x)] \cdot [n a_{n-1}]. \quad (24c)$$

Fijado ω , a cada $P(t)$ corresponde una $A(t)$ determinada y

viceversa, de modo que es lo mismo dar $\{p_n\}$ o dar ω y $\{a_n\}$; podemos pues enunciar:

La solución general de (22) es de la forma

$$\{P_n(x)\} = \{\sigma_n(x; \omega; \langle a \rangle)\} = \langle (1 + \omega t A(t))^{x/\omega} \rangle = \langle P(t; x) \rangle \quad (24d)$$

siendo $\langle a \rangle$ una sucesión arbitraria.

Llamamos la atención del lector a no confundir el símbolo $\sigma_n(x; \omega; \langle a \rangle)$ con el $\sigma_n(x; \omega | \langle a \rangle)$. Para $\langle a \rangle = \langle 1 \rangle$ es $\sigma_n(x; \omega; \langle 1 \rangle) = \sigma_n(x; \omega)$ ⁽⁶⁾.

Definamos ahora, para una sucesión $\langle b \rangle = \{b_n\}$, el operador,

$$\Delta_{\langle b \rangle} f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{i!} \Delta_{\omega}^{i+1} f(x). \quad (26)$$

De (24b) obtenemos

$$\Delta_{\omega}^i P(t; x) = \Delta_{\omega}^{i-1} P(t; x) t A(t) = P(t; x) (t A(t))^i$$

$$\Delta_{\omega}^{\langle b \rangle} P(t; x) = P(t; x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{i!} (t A(t))^{i+1}. \quad (26a)$$

Para cada sucesión $\{a_n\} = \langle a \rangle = \langle A(t) \rangle$ designaremos con $\langle \bar{a} \rangle = \{\bar{a}_n\} = \langle \bar{A}(t) \rangle$ la sucesión tal que las funciones $t \bar{A}(t)$ y $t A(t)$ sean inversas ⁽⁷⁾; entonces (26a) da

$$\Delta_{\omega}^{\langle \bar{a} \rangle} P(t; x) = P(t; x) \cdot t \quad (27)$$

que significa

$$\Delta_{\omega}^{\langle \bar{a} \rangle} \sigma_n(x; \omega; \langle \bar{a} \rangle) = n \sigma_{n-1}(x; \omega; \langle \bar{a} \rangle). \quad (27a)$$

⁽⁶⁾ La solución general (24d) no contiene dos parametros arbitrarios w , $\langle a \rangle$ sino uno solo $\{p_n\} = \langle P(t) \rangle$; fijados w , $\langle a \rangle$, w_1 , existe una $\langle b \rangle$ tal que $\sigma_n(x; w; \langle a \rangle) = \sigma_n(x; w_1; \langle b \rangle)$.

⁽⁷⁾ R. Lagrange considera la operación general: $\langle c \rangle = \langle a \rangle : \langle b \rangle$ definida por $C(t) = A(t) \cdot B(tA(t))$, de modo que $\langle \bar{a} \rangle$ es definida por la relación $\langle a \rangle : \langle \bar{a} \rangle = \langle 1 \rangle$.

Luego: $\{\sigma_n(x; \omega; \langle \bar{a} \rangle)\}$ está perfectamente definida por la ecuación funcional (27a) y por la condición de anularse para $x=0$. Esto sugiere ampliar la definición de Appel llamando sucesión armónica $\Delta_{\omega \langle a \rangle}$ a toda sucesión $\{P_n(x)\}$ tal que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y $\Delta_{\omega \langle a \rangle} P_n(x) = n P_{n-1}(x)$. Igual como en el § 2 se ve que toda sucesión armónica $\Delta_{\omega \langle a \rangle}$ es de la forma

$$\{\sigma_n(x; \omega; \langle a \rangle | \langle c \rangle)\} = \{\sigma_n(x; \omega; \langle \bar{a} \rangle)\} \cdot \{C_n\} = \langle P(t; x) \cdot C(t) \rangle \quad (28)$$

siendo $\{c_n\}$ una sucesión arbitraria que llamaremos *base* de la sucesión (28); de modo que (28) depende de dos sucesiones paramétricas $\langle p \rangle$ y $\langle c \rangle$.

Vamos a dar a la sucesión (28) una forma más útil; para ello probaremos antes la siguiente propiedad: *fijada la sucesión (28) y fijado ω_1 , existe una sucesión $\langle b \rangle = \{b_n\} = \langle B(t) \rangle$ tal que para todo n*

$$\Delta_{\omega_1 \langle b \rangle} \sigma_n(a; \omega; \langle \bar{a} \rangle | \langle c \rangle) = n \sigma_{n-1}(x; \omega; \langle \bar{a} \rangle). \quad (29)$$

En efecto de (24a) tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_1} (P(t; x) \cdot C(t)) &= C(t) \cdot \Delta_{\omega_1} P(t; x) = \\ &= C(t) \cdot P(t; x) \cdot \frac{(1 + \omega t A(t))^{\omega_1: \omega - 1}}{\omega_1}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{\omega_1 \langle b \rangle} (P(t; x) \cdot C(t)) = C(t) \cdot P(t; x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{i!} \left[\frac{(1 + \omega t A(t))^{\omega_1: \omega - 1}}{\omega_1} \right]^{i+1}.$$

Bastará elegir $\langle b \rangle = \langle B(t) \rangle$ de modo que sea

$$B_1 \left(\frac{[1 + \omega t A(t)]^{\omega_1: \omega - 1}}{\omega_1} \right) = \frac{t}{C(t)} \text{ con } B_1(t) = t B(t), \quad (30)$$

para obtener

$$\Delta_{\omega_1 \langle b \rangle} (P(t; x) \cdot C(t)) = P(t; x) \cdot t$$

que es justamente (29). Fijado ω_1 , a cada $\langle c \rangle$ corresponde una $\langle b \rangle$ que verifica (30) y viceversa, de modo que en vez de dar $\langle c \rangle$ podemos dar ω_1 y $\langle b \rangle$, luego podemos enunciar: la sucesión armónica $\Delta_{\omega_1 \langle a \rangle}$ más general es de la forma

$$\{L_n(x; \omega, \omega_1; \langle a \rangle, \langle b \rangle)\} = \{\sigma_n(x; \omega; \langle \bar{a} \rangle | \langle c \rangle)\} = \langle P(t; x) \cdot C(t) \rangle \quad (28a)$$

donde $\langle b \rangle$ y $\langle c \rangle$ están relacionadas por (30) y $P(t; x)$ está dada por (24a); $\langle p \rangle$ y $\langle c \rangle$ son las bases de la sucesión (28). Los polinomios $L_n(x) = L_n(x; \omega, \omega_1; \langle a \rangle, \langle b \rangle)$ son los polinomios de Bernoulli de interpolación introducidos por R. Lagrange⁽⁸⁾; ellos dependen de dos sucesiones paramétricas $\langle p \rangle$ y $\langle c \rangle$; además la sucesión (28a) puede definirse como la única armónica $\Delta_{\omega \langle a \rangle}$ que para $x=0$ se reduce a $\{c_n\}$. Para $\omega = \omega_1$, $\langle c \rangle = \langle 1 \rangle$, (30) da $B_1(tA(t)) = t$, esto es que $tB(t) =$ función inversa de $tA(t)$ $\therefore \langle b \rangle = \langle \bar{a} \rangle$, luego

$$\{L_n(x; \omega, \omega; \langle \bar{a} \rangle, \langle \bar{a} \rangle)\} = \sigma_n(x; \omega; \langle a \rangle). \quad (31)$$

Para $\omega_1 = \omega$, $\langle a \rangle = 1$, (30) da $B(t) = 1/C(t)$, luego

$$\{L_n(x; \omega, \omega; \langle 1 \rangle, \langle a \rangle^{-1})\} = \{\sigma_n(x; \omega | \langle a \rangle)\}. \quad (31a)$$

Para $\langle a \rangle = \langle b \rangle = \langle 1 \rangle$, $\omega_1 = 1$, $\omega = 0$, (30) da $e^t - 1 = t: C(t)$ $\therefore C(t) = t/(e^t - 1) = \{B_n\}$:

$$\{L_n(x; 0, 1; \langle 1 \rangle, \langle 1 \rangle)\} = \{B_n(x)\}. \quad (31b)$$

Para $\omega = \omega_1 = 0$, $\langle a \rangle = 1$, (30) da $tB(t) = t: C(t)$ $\therefore C(t) = 1/B(t)$ $\therefore \langle c \rangle = \langle b \rangle^{-1}$, luego

$$\{L_n(x; 0, 0; \langle 1 \rangle, \langle b \rangle)\} = \langle b \rangle^{-1} \cdot \{x^n\} \quad (31c)$$

y llamando $H_n(x)$ a este último polinomio, obtendremos de (28a) y (24a)

(⁸) Tenga presente el lector que nuestras definiciones difieren de las de R. Lagrange en un factor!

$$e^{tx - \lg B(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (31d)$$

lo que indica que $H_n(x)$ son los llamados polinomios de Hermite generalizados. Para $\omega = 0, \omega_1 = 1, \langle a \rangle = \langle 1 \rangle$ se obtienen los llamados polinomios de Euler.

De las fórmulas (24a), (24b), (27), (28a), (30) se deducen fácilmente las propiedades siguientes cuyas demostraciones detalladas pueden verse en la memoria de R. Lagrange:

1) Se tiene la fórmula de interpolación de Newton generalizada:

$$f(x+z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma_i(x; \omega; \langle a \rangle)}{i!} \frac{\Delta_{\omega \langle a \rangle}^i}{\omega} f(x).$$

2)

$$\Delta_{\omega_1 \langle b \rangle}^r L_{n+r}(x; \omega, \omega_1; \langle a \rangle, \langle b \rangle) = [\sigma_n(x; \omega; \langle \bar{a} \rangle)] \cdot \langle c \rangle^{r-1}.$$

$$3) [L_n(x+y)] = [L_n(x)] \cdot [\sigma_n(y; \omega; \langle \bar{a} \rangle)].$$

4) Llamando $\{L_n^{(r)}(x)\}$ a la sucesión que resulta si en (28a) cambiamos $\langle c \rangle$ por $\langle c \rangle^r$, se tiene: para todo sistema de r variables $x, y, \dots$ es

$$[L_n(x)] \cdot [L_n(y)] \dots = [L_n^{(r)}(x+y+z+\dots)].$$

$$[L_n^{(r)}(x)] \cdot [L_n^{(s)}(y)] \dots = [L_n^{(r+s+\dots)}(x+y+\dots)].$$

$$4a) \Delta_{\omega_1 \langle b \rangle} L_n^{(s)}(x) = n L_{n-1}^{(s-1)}(x).$$

$$4b) \Delta_{\omega \langle a \rangle} L_n^{(s)}(x) = n L_{n-1}^{(s)}(x).$$

$$4c) \Delta_{\omega_2}^r [L_{n+r}^{(s)}(x)] = [L_n^{(s)}(x)] \cdot [\sigma_n(\omega_2; \omega; \langle \bar{a} \rangle)]^r.$$

$$5) f(x+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(z)}{n!} \cdot \Delta_{\omega_1 \langle b \rangle} \Delta_{\omega \langle a \rangle}^n f(x).$$

De (24a) y (28a) resulta todavía la siguiente propiedad que no figura en la memoria de R. Lagrange: *Las sucesiones $\{L_n(x)\}$ son las únicas soluciones que verifican la ecuación funcional*

$$\{L_n(x+y)\} = \{L_n(x)\} \cdot \{L_n(y)\} \cdot \{L_n(0)\}; \quad (32)$$

para $L_n(0)=0$ ($n>0$), $L_0(x)=1$, (32) se reduce a la ecuación (22).

§ 4. Para lo que sigue nos resultará más cómodo usar en lugar de la notación de R. Lagrange, la siguiente

$$\{L_n(x)\} = \{\sigma_n(x; \omega; \langle a \rangle | \langle c \rangle)\} = \langle P(t; x) \cdot C(t) \rangle,$$

$$P(t; x) = (1 + \omega t A(t))^{x/\omega},$$

que pone en evidencia las bases $\langle a \rangle = \langle A(t) \rangle$, $\langle c \rangle = \langle C(t) \rangle$. La sucesión $\{L_n(x)\}$ está perfectamente determinada por la condición de ser armónica $\Delta_{\omega \langle a \rangle}$ y por sus valores en el origen $\{L_n(0)\}$; el operador $\Delta_{\omega \langle a \rangle}$ depende exclusivamente de $A(t)$, en cambio $C(t)$ determina los valores $\{L_n(0)\}$. Podemos pues poner la

Definición 1. Dos sucesiones de Bernoulli se dirán *equivalentes*, si sus funciones generatrices $(1 + \omega t A(t))^{x/\omega} \cdot C(t)$ y $(1 + \omega t A_1(t))^{x/\omega} \cdot C_1(t)$ verifican

$$C(t) = C_1(t), \quad A_1(t) = \delta A(t), \quad \delta = \text{constante} \neq 0.$$

De (25) resulta que si dos sucesiones son equivalentes y $\Delta_{\omega \langle b \rangle}$, $\Delta_{\omega \langle \beta \rangle}$ son sus operadores respectivos respecto a los cuales ellas son armónicas, entonces se verifica $\beta_n = \delta^{n+1} \cdot b_n$.

Reuniendo en una *clase* todas las sucesiones equivalentes a una dada, las posibles sucesiones de Bernoulli se distribuyen en clases y cada clase está determinada por una sucesión cualquiera de la misma. En cada clase existe una y sola una sucesión tal que el desarrollo de $t A(t)$ empieza con $t + \dots$; diremos que esta es la sucesión *reducida* de la clase.

Vamos a destacar una clase notable de sucesiones de Bernoulli que constituirá el objeto principal de nuestro estudio.

Definición 2. Llamaremos *producto escalar* de dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, a la sucesión $\{c_n\}$ definida por

$$c_n = a_0 b_0 + C_n^1 a_1 b_1 + C_n^2 a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \quad (34)$$

en símbolos: $\{c_n\} = \{a_n\} \frown \{b_n\}$, $\langle C(t) \rangle = \langle A(t) \rangle \frown \langle B(t) \rangle$.

Definición 3. Diremos que una sucesión de funciones $\{\lambda_n(x)\}$ es permutable de 1.ª especie o simplemente *permutable*, si $\lambda_n(x)$ es un polinomio de grado n , y si para todo par de enteros naturales $n \geq 0$, $k \geq 0$, se verifica

$$\lambda_n(k) = \lambda_k(n). \quad (35)$$

Teorema 1. Si $\{\lambda_n(x)\}$ es una sucesión permutable, existe una sucesión numérica $\{\lambda_n\}$ tal que

$$\{\lambda_n(x)\} = \left\{ \sum_{i=0}^n C_n^i \lambda_i \sigma_i(x) \right\} = \{\sigma_n(x)\} \frown \{\lambda_n\} \quad (36)$$

donde

$$\sigma_0(x) = 1$$

$$\sigma_i(x) = x \sigma_{i-1}(x+1) = x(x-1) \dots (x-(i-1))$$

para $i \geq 1$; recíprocamente toda sucesión de la forma (36) es permutable.

Demostración. — Todo polinomio de grado n puede ponerse (y de una sola manera) bajo la forma

$$\lambda_n(x) = \lambda_n^0 \sigma_n(x) + \lambda_n^1 \sigma_{n-1}(x) + \lambda_n^2 \sigma_{n-2}(x) + \dots + \lambda_n^n.$$

Teniendo en cuenta que

$$\sigma_h(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < h \\ \frac{k!}{(k-h)!} & \text{para } k \geq h \end{cases},$$

la condición

$$\lambda_n(k) = \lambda_k(n)$$

donde, para fijar las ideas, supondremos $k \leq n$, se escribe luego

$$\sum_{i=0}^k \lambda_n^{n-k+i} \frac{k!}{i!} = \sum_{i=0}^k \lambda_k^{i_k} \frac{n!}{(n-k+i)!}.$$

Estas condiciones se realizan evidentemente si se pone

$$\lambda_k^i \frac{i!}{k!} = \lambda_n^{n-k+i} \frac{(n-k+i)!}{n!}$$

es decir

$$\lambda_k^i : C_k^{k-i} = \lambda_n^{(n-k)+i} : C_n^{k-i},$$

$$\lambda_n^{n-p} = \lambda_p^0 C_n^p.$$

Esta posición proporciona precisamente para $\lambda_n(x)$ la determinación (36) cuando se ponga $\lambda_i = \lambda_i^0$, siendo por otra parte estas λ_i^0 arbitrarias. Notemos por otra parte que, si se supone conocidas los $\lambda_k(x)$ para $k < n$, la (35) impone para $\lambda_n(x)$ n condiciones, poniendo sucesivamente $k = 0, 1, \dots, n-1$; por lo tanto, queda precisamente disponible para cada valor de n una constante arbitraria; queda pues demostrado que (36) es la representación general de las sucesiones $\{\lambda_n(x)\}$.

Nota. En lo sucesivo consideraremos tan solo sucesiones $\{\lambda_n(x)\}$ tales que $\lambda_0(x) = 1$, lo cual evidentemente no restringe la generalidad de los resultados; luego siempre se supondrá $\lambda_0 = 1$ al tratarse de sucesiones permutables.

Del teorema resulta que la sucesión permutable más general se obtiene tomando una sucesión numérica $\{\lambda_n\}$ cualquiera y formando su producto escalar por $\{\sigma_n(x)\}$; por eso diremos que $\{\lambda_n\}$ es la *base* de la sucesión permutable. Comparando (36) con (19) se observa que al cambiar el producto ordinario por el escalar las sucesiones armónicas de Apell se cambian en sucesiones permutables. Veamos pues si existen sucesiones ar-

mónicas generalizadas permutables, es decir si existen sucesiones de Bernoulli permutables.

Teorema 2. *Todas las sucesiones de Bernoulli permutables forman una clase (supuesto $\lambda_0=1$); luego existe una única sucesión de Bernoulli reducida y permutable.*

Demostración. Sea $\{\lambda_n(x)\}$ una sucesión de Bernoulli permutable. Por ser permutable, es de la forma $\lambda_n(x) = \lambda_n \sigma_n(x) + C_n^1 \lambda_{n-1} \sigma_{n-1}(x) + \dots + 1$, y por ser sucesión de Bernoulli existe un operador de la forma

$$\Delta_{\langle \delta \rangle} = \delta_0 \Delta + \delta_1 \overset{2}{\Delta} + \delta_2 \overset{3}{\Delta} + \dots + \delta_{n-1} \overset{n}{\Delta} + \dots \quad (\Delta = \Delta),$$

tal que

$$\Delta_{\langle \delta \rangle} \lambda_n(x) = n \lambda_{n-1}(x).$$

Tendremos pues, $\delta_0 \cdot \Delta \lambda_1(x) = \lambda_0(x) = 1$, $\delta_0 \lambda_1 = 1$ luego

$$\lambda_1 = 1/\delta_0.$$

De $\delta_0 \cdot \Delta \lambda_2(x) + \delta_1 \cdot \overset{2}{\Delta} \lambda_2(x) = 2 \lambda_1(x)$ se obtiene

$$\delta_0 (2 \lambda_2 \sigma_1(x) + 2 \lambda_1) + \delta_1 (2 \lambda_2) = 2 (\lambda_1 \sigma_1(x) + 1)$$

$$2 \lambda_1 \delta_0 + 2 \lambda_2 \delta_1 = 2, \quad 2 \lambda_2 \delta_0 = 2 \lambda_1$$

lo que da

$$\delta_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1/\delta_0^2.$$

Siguiendo en esta forma se demuestra por inducción que para todo $n > 0$ es

$$\delta_n = 0, \quad \lambda_n = 1/\delta_0^n$$

luego toda sucesión de Bernoulli permutable (con $\lambda_0=1$) tiene la forma

$$\frac{1}{\delta_0^n} \sigma_n(x) + C_n^1 \frac{1}{\delta_0^{n-1}} \sigma_{n-1}(x) + \dots + 1 = \{\sigma_n(x)\} \sim \left\{ \frac{1}{\delta_0^n} \right\} \quad (37)$$

y es armónica respecto al operador $\delta_0 \Delta$, siendo $\delta_0 \neq 0$ una constante.

Como la función generatriz de esta sucesión es

$$\left(1 + \frac{t}{\delta_0}\right)^n \cdot e^t, \quad (37a)$$

resulta que todas las sucesiones de Bernoulli permutables son equivalentes y existe una sola entre ellas que es reducida, la que se obtiene para $\delta_0 = 1$.

Notación: A la sucesión de Bernoulli permutable general, que por lo visto depende de un parámetro δ_0 , la designaremos con

$$\{\varphi_n(x; \delta_0)\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta_0^i} C_n^i \sigma_i(x) \right\} = \{\sigma_n(x)\} \sim \left\{ \frac{1}{\delta_0^n} \right\} \quad (38)$$

$$\langle \varphi_n(x; \delta_0) \rangle = \langle (1 + t/\delta_0) x \cdot e^t \rangle, \quad (38a)$$

y a la única sucesión de Bernoulli permutable y reducida con

$$\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_n(x; 1)\} = \left\{ \sum_{i=1}^n C_n^i \sigma_i(x) \right\} = \langle (1 + t) x \cdot e^t \rangle \quad (39)$$

de modo que se tendrá

$$\delta_0 \cdot \Delta \varphi_n(x; \delta_0) = n \varphi_{n-1}(x; \delta_0); \quad \Delta \varphi_n(x) = n \varphi_{n-1}(x). \quad (39a)$$

§ 5. En lo que sigue usaremos todavía la terminología siguiente: Diremos que los operadores

$$\Delta f = \underset{1}{\Delta} f = f(x+1) - f(x) \quad \text{y} \quad \bar{\Delta} f = \underset{-1}{\Delta} f = f(x) - f(x-1)$$

son *conjugados*; análogamente si $f_n(x)$ es un polinomio de grado n , llamaremos polinomio *conjugado* de $f_n(x)$ al

$$\bar{f}_n(x) = (-1)^n f_n(-x-1);$$

entonces si la sucesión $\{f_n(x)\}$ es armónica Δ , la sucesión conjugada $\{\bar{f}_n(x)\}$ será armónica $\bar{\Delta}$. En particular se tiene

$$\bar{\sigma}_n(x) = (-1)^n \sigma_n(-x-1) = (x+1)(x+2)\dots(x+n) \quad (40)$$

$$\bar{\Delta} \bar{\sigma}_n(x) = n \sigma_{n-1}(x), \quad \bar{\sigma}_n(-1) = 0. \quad (40a)$$

Si $g_n(x) = \bar{f}_n(x)$ será evidentemente $f_n = \bar{g}_n(x)$; por eso diremos que $f_n(x)$ es autoconjugado si $f_n(x) = \bar{f}_n(x)$.

Si $\{\lambda_n(x)\}$ es una sucesión permutable de 1er. especie resulta por (35) que la sucesión conjugada $\{\mu_n(x)\} = \{\bar{\lambda}_n(x)\}$ verifica

$$(-1)^m \mu_{m-1}(-p) = (-1)^p \mu_{p-1}(-m) \quad (41)$$

para todo par de enteros $m \geq 1, p \geq 1$. Por eso diremos que una sucesión $\{\mu_n(x)\}$ es *permutable de 2da. especie* si $\mu_n(x)$ es de grado n y se verifica (41) para todo par de enteros $m \geq 1, p \geq 1$. De modo que a toda sucesión permutable de 1er. especie corresponde una conjugada permutable de 2da. especie y viceversa; en las de 2da. especie la permutabilidad entre índice y argumento se realiza para valores enteros y negativos del argumento. De lo visto en el § anterior resulta que toda sucesión permutable de 2da. especie es de la forma

$$\{\bar{\varphi}_n(x; \delta)\} = \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{1}{\delta^i} C_n^i \bar{\sigma}_i(x) \right\} = \langle (1-t/\delta)^{-x-1} \cdot e^{-t} \rangle. \quad (42)$$

Notación. En lo sucesivo designaremos con $g_n(x; \delta) = \bar{\varphi}_n(x; \delta)$, y con

$$\{g_n(x)\} = \{g_n(x; 1)\} = \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i \bar{\sigma}_i(x) \right\} = \langle (1-t)^{-x-1} \cdot e^{-t} \rangle. \quad (42a)$$

En virtud de la permutabilidad tendremos las propiedades siguientes

$$(-1)^k g_{k-1}(-n; \delta) = (-1)^n g_{n-1}(-k; \delta) = -\varphi_{k-1}(n-1; \delta) \quad (43)$$

$$\bar{\Delta} g_n(x) = n g_{n-1}(x). \quad (44)$$

Llamando $F(t)$ a la función generatriz de (42a), se comprueba fácilmente que

$$(1-t) F'(t) = (t+x) F(t) \quad (45)$$

de donde se obtiene, efectuando derivaciones, la fórmula recorrente

$$g_n(x) = (n-1+x) g_{n-1}(x) + (n-1) g_{n-2}(x). \quad (45a)$$

La última fórmula indica que los polinomios $g_n(x)$ son los numeradores de las sucesivas reducidas de la fracción continua

$$x + \frac{1}{(x+1)+} \frac{2}{(x+2)+} \frac{3}{(x+3)+} \cdots \frac{n}{(x+n)+} \cdots \quad (45b)$$

de modo que para $k \geq 0$ entero, los números

$$g_n(k) = \bar{f}_{n,k}, \quad g_n(0) = \bar{f}_n = f_n \quad (46)$$

son justamente los números estudiados en nuestra Nota anterior, y por lo tanto los polinomios $g_n(x)$ y $\varphi_n(x)$ son las generalizaciones correspondientes de los polinomios factoriales.

Veamos ahora si existen sucesiones permutables autoconjugadas, por lo tanto permutables de 1er. y 2da. especie a la vez; esto nos conducirá a una nueva sucesión de polinomios íntimamente vinculada a las anteriores y que posee propiedades notables.

Teorema 3⁽⁹⁾. *Existe una y una sola sucesión permutable autoconjugada (luego permutable de 1er. y 2da. especie a la vez), que es la*

$$\{\lambda_n(x)\} = \left\{ \sum_{i=0}^n \frac{2^i}{i!} C_n^i \sigma_i(x) \right\} = \{\sigma_n(x)\} \frown \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}. \quad (47)$$

Demostración. Sea $\{\lambda_n(x)\} = \{\sigma_n(x)\} \frown \{\lambda_n\}$ una sucesión permutable autoconjugada. Entonces $\lambda_1(x) = -\lambda_1(-x-1)$ es de

(⁹) Agradezco al director de las *Math. Notae* algunos perfeccionamientos, particularmente en la demostración de este teorema.

cir $\lambda_1 x + 1 = \lambda_1 x + \lambda_1 - 1$ y resulta

$$\lambda_1 = 2 = \frac{2}{1!}.$$

Análogamente $\lambda_2(x) = \lambda_2(-x-1)$, esto es

$$\lambda_2 x(x-1) + 2\lambda_1 x + 1 = \lambda_2(-x-1)(-x-2) + 2\lambda_1(-x-1) + 1$$

lo que da $2\lambda_2 = 2\lambda_1$ y resulta

$$\lambda_2 = \frac{2^2}{2!}.$$

Siguiendo en la misma forma se obtiene sucesivamente

$$\lambda_3 = \frac{4}{3} = \frac{2^3}{3!}, \quad \lambda_4 = \frac{2}{3} = \frac{2^4}{4!}, \dots$$

Resulta por tanto, en primer lugar que los sucesivos coeficientes λ_i tienen valores unívocamente determinados y está justificado suponer, por inducción, la fórmula (47); vamos a verificar por cálculo directo que las $\lambda_n(x)$ proporcionadas por (47) realizan efectivamente la condición

$$\lambda_n(x) - (-1)^n \lambda_n(-x-1) = 0.$$

Se tiene

$$\lambda_n(x) - (-1)^n \lambda_n(-x-1) = \sum_{i=0}^n \frac{2^i}{i!} C_n^i (\sigma_i(x) - (-1)^{n+i} \bar{\sigma}_i(x)) \quad (*)$$

donde, según (40),

$$\bar{\sigma}_i(x) = (x+1)(x+2) \dots (x+i).$$

Para $x=0$ se tiene en seguida

$$\sigma_0(0) = \bar{\sigma}_0(0) = 1, \quad \sigma_i(0) = 0, \quad \bar{\sigma}_i(0) = i! \quad (i \geq 1)$$

de donde, para n par,

$$\begin{aligned}\lambda_n(0) - (-1)^n \lambda_n(-1) &= - \sum_{i=1}^n \frac{2^i}{i!} i! C_n^i (-1)^i \\ &= 1 - \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i 2^i = 1 - (1-2)^n = 0;\end{aligned}$$

para n impar

$$\begin{aligned}\lambda_n(0) - (-1)^n \lambda_n(-1) &= 2 + \sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i 2^i = 1 + \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i 2^i \\ &= 1 + (1-2)^n = 0.\end{aligned}$$

Vamos a demostrar análogamente que son nulas para $x=0$ todas las diferencias sucesivas de la función

$$\Lambda_n(x) = \lambda_n(x) - (-1)^n \lambda_n(-x-1).$$

Es

$$\Delta^k \sigma_i(x) = \frac{i!}{(i-k)!} \sigma_{i-k}(x), \quad \Delta^k \bar{\sigma}_i(x) = \frac{i!}{(i-k)!} \bar{\sigma}_{i-k}(x+k)$$

entendiendo que, para $k > i$ será

$$\sigma_{i-k} = \bar{\sigma}_{i-k} = 0.$$

Resulta luego

$$\Delta^k \Lambda_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{2^i}{(i-k)!} C_n^i (\sigma_{i-k}(x) - (-1)^{n+i} \bar{\sigma}_{i-k}(x+k))$$

y, para $x=0$

$$\begin{aligned}\Delta^k \Lambda_n(0) &= \frac{2^{kn}}{k!(n-k)!} [1 - (-1)^{n+k}] + \sum_{i=k+1}^n \frac{2^{in} i!}{i!(n-i)!(i-k)!k!} (-1)^{n+i} \\ &= \frac{2^{kn}}{k!(n-k)!} [1 - (-1)^{n+k} \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} 2^{i-k}] \\ &= \frac{2^{kn}}{k!(n-k)!} [1 - (-1)^{n-k} (1-2)^{n-k}] = 0.\end{aligned}$$

Resulta así verificada la tesis.

Notación. A la única sucesión permutable autoconjugada la designaremos con

$$\{M_n(x)\} = \left\{ \frac{2^n}{n!} \sigma_n(x) + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} C_n^1 \sigma_{n-1}(x) + \dots + 1 \right\}. \quad (48)$$

$M_n(x)$ verifica pues la tres relaciones siguientes

$$M_n(-x-1) = (-1)^n M_n(x) \quad (48a)$$

$$M_n(k) = M_k(n) \quad (k, n \geq 0) \quad (48b)$$

$$(-1)^k M_{k-1}(-n) = (-1)^n M_{n-1}(-k) \quad (k, n \geq 1). \quad (48c)$$

Como $\sigma_i(-x-1) = (-1)^i \bar{\sigma}_i(x)$ de (48) y (48a) resulta

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{2^i}{i!} C_n^i \sigma_i(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{2^i}{i!} C_n^i \bar{\sigma}_i(x). \quad (48d)$$

§ 6. Para poder entrar más adentro en el estudio de los polinomios $M_n(x)$ aclaremos antes su vínculo con las sucesiones de Bernoulli. Para ello observemos que frecuentemente se usa en lugar de la sucesión de Bernoulli $\{L_n(x)\}$ la sucesión $\left\{ \frac{1}{n!} L_n(x) \right\}$ (así lo hacen por ejemplo N. Nielsen y R. Lagrange en sus obras citadas). Se presente pues naturalmente el problema de determinar las sucesiones de Bernoulli $\{L_n(x)\}$ tales que $\{L_n(x)/n!\}$ sea permutable.

Teorema 4. *Todas las sucesiones de Bernoulli $\{L_n(x)\}$ tales que $\{L_n(x)/n!\}$ es permutable forman una clase cuya función generatriz es*

$$\left(1 + \frac{t}{\delta(1-t)} \right)^x \cdot \frac{1}{1-t} \quad (\delta \neq 0, \text{ constante}); \quad (49)$$

esto es, para cada δ (49) genera una sucesión Bernoulli $\{L_n(x)\} = \{n! M_n(x; \delta)\}$ tal que $\{M_n(x; \delta)\}$ es permutable.

Demostración. Por ser $\{L_n(x)/n!\}$ permutable, se tiene

$$L_n^*(x) = \frac{1}{n!} L_n(x) = \lambda_n \sigma_n(x) + C_n^1 \lambda_{n-1} \sigma_{n-1}(x) + \dots + 1. \quad (50)$$

Como $\{L_n(x)\}$ es sucesión Bernoulli existe un operador de la forma

$$\Delta_{\langle \delta \rangle} = \delta_0 \Delta + \delta_1 \overset{2}{\Delta} + \delta_2 \overset{3}{\Delta} + \dots \quad (50a)$$

tal que $\Delta_{\langle \delta \rangle} L_n(x) = n L_{n-1}(x)$, o lo que es lo mismo

$$\Delta_{\langle \delta \rangle} L_n^*(x) = L_{n-1}^*(x). \quad (50b)$$

Para $n=1$ tendremos $\delta_0 \cdot \Delta L_1^*(x) = L_0^*(x) = 1$, luego $\delta_0 \lambda_1 = 1$ y

$$\lambda_1 = 1/\delta_0. \quad (50c)$$

Para $n=2$ tendremos $\delta_0 \cdot \Delta L_2^*(x) + \delta_1 \cdot \overset{2}{\Delta} L_2^*(x) = L_1^*(x)$ luego

$$\delta_0 [2 \lambda_2 \sigma_1(x) + 2 \lambda_1] + \delta_1 \cdot 2 \lambda_2 = \lambda_1 \sigma_1(x) + 1$$

de donde $2 \delta_0 \lambda_1 + 2 \delta_1 \lambda_2 = 1$, $2 \lambda_2 \delta_0 = \lambda_1$ y resulta

$$\delta_1 = -\delta_0^2, \quad \lambda_2 = 1/2 \delta_0^2. \quad (50d)$$

Análogamente se demuestra por inducción que para todo n es

$$\delta_n = (-1)^n \delta_0^{n+1}, \quad \lambda_n = \frac{1}{n! \delta_0^n} \quad (50e)$$

de modo que

$$L_n^*(x) = \frac{1}{n!} L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{C_n^i}{i! \delta_0^i} \sigma_i(x) \quad (51)$$

$$\Delta_{\langle \delta \rangle} = \delta_0 \Delta - \delta_0^2 \overset{2}{\Delta} + \delta_0^3 \overset{3}{\Delta} - \dots. \quad (51a)$$

Llamando $P(t; x) \cdot C(t)$ a la función generatriz de $\{L_n(x)\}$, como por (51) $L_n(0) = n!$ resulta

$$C(t) = \sum_0^{\infty} n! \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-t}. \quad (52)$$

Para determinar $P(t; x) = (1 + t A(t))^n$, observemos que llamando $\langle \delta(t) \rangle = \{n! \delta_n\}$ tendremos de (50e)

$$\delta(t) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot n! \delta_0^{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!} = \frac{\delta_0}{1 + \delta_0 t} \quad (53)$$

y por lo visto en el § 3, fórmula (25), $t A(t)$ y $t \delta(t)$ son funciones inversas; luego obtenemos inmediatamente que

$$A(t) = \frac{1}{\delta_0(1-t)} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\delta_0} n! \cdot \frac{t^n}{n!} \quad (54)$$

y la función generatriz de $\{L_n(x)\}$ es la de la fórmula (49) lo cual prueba la tesis.

Análogamente todas las sucesiones Bernoulli $\{L_n(x)\}$ tales que $\{L_n(x)/n!\}$ es permutable de 2da. especie están dadas por la fórmula

$$\begin{aligned} \{n! \bar{M}_n(x; \delta)\} &= \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{n!}{i! \delta^i} \sigma_i(x) \right\} = \\ &= \left\langle \left(1 - \frac{t}{\delta(1-t)} \right)^{-x-1} \cdot \frac{1}{1+t} \right\rangle. \quad (49a) \end{aligned}$$

Para $\delta = \frac{1}{2}$ coinciden las funciones (49) y (49a) es decir $\{L_n(x)/n!\}$ es permutable y autoconjugada y por lo tanto en virtud del teorema 3 obtenemos el siguiente:

Corolario 1. Se tiene $M_n(x) = M_n(x; 1/2)$ de modo que $\{n! M_n(x)\}$ es una sucesión de Bernoulli y su función generatriz es

$$\{n! M_n(x)\} = \{n! M_n(x; 1/2)\} = \left\langle \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^x \cdot \frac{1}{1-t} \right\rangle. \quad (55)$$

Corolario 2. Llamando $\Delta_{<M>}$ al operador

$$\Delta_{<M>} = \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta^2 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\Delta^n + \dots \quad (55a)$$

se tiene que

$$\Delta_{<M>} M_n(x) = M_{n-1}(x). \quad (55b)$$

La siguiente propiedad nos será muy útil más adelante:

Teorema 5. Designando con $D = Df(x) = f'(x)$, $D^n = D(D^{n-1})$ y con $D_{<M>}$ el operador

$$D_{<M>} = \frac{2B_2(2^2-1)}{2!}D + \dots + \frac{2B_{n+1}(2^{n+1}-1)}{(n+1)!}D^n + \dots \quad (56)$$

se tiene

$$D_{<M>} M_n(x) = M_{n-1}(x). \quad (57)$$

Demostración. Llamando $\Phi(t; x)$ a la función generatriz (55) tendremos, cualquiera que sea la sucesión numérica $\{b_n\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} \Phi_x^{(n)}(t; x) = \Phi(t; x) \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} \left\{ \lg \frac{1+t}{1-t} \right\}^n. \quad (58)$$

Tomando en cuenta (2) del § 1 y que

$$\frac{e^\omega - 1}{e^\omega + 1} = 1 - \frac{2}{\omega} \cdot \frac{\omega}{e^\omega + 1} = 1 - \frac{2}{\omega} \left(\frac{\omega}{e^\omega + 1} - \frac{2\omega}{e^{2\omega} - 1} \right)$$

se tiene

$$\frac{e^\omega - 1}{e^\omega + 1} = \frac{2B_2(2^2-1)}{2!}\omega + \dots + \frac{2B_{n+1}(2^{n+1}-1)}{(n+1)!}\omega^n + \dots \quad (59)$$

Como $(e^\omega - 1)/(e^\omega + 1)$ es la función inversa de $\lg \{(1+t)/(1-t)\}$, resulta que haciendo en (58)

$$b_{n-1} = \frac{2B_{n+1}(2^{n+1}-1)}{(n+1)!} \quad (59a)$$

tendremos

$$\sum_1^{\infty} b_{n-1} \phi_x^{(n)}(t; x) = \phi(t; x) \cdot t \quad (59b)$$

y de (59a), (59b) resulta inmediatamente la tesis.

En una Nota próxima nos proponemos estudiar las propiedades aritméticas de los polinomios $g_n(x)$ y $M_n(x)$ y de sus coeficientes; luego aplicaremos dichas propiedades a las congruencias entre los números de Bernoulli y cocientes de Wilson y Fermat.

LA PLATA - UNIVERSIDAD NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

CONSTRUCCION DE CONICAS DEDUCIDA DE UNA PARTICULARIDAD DE LAS MISMAS RESPECTO DE UN CIRCULO, Y CRITERIO PARA DEDUCIR SU GENERO

por

JOSÉ MATEO

INTRODUCCIÓN

Consideraremos en el presente trabajo, una particularidad de posición, que llamaremos ω , de un par de cónicas coplanares γ_1 y γ_2 .

Dicha particularidad consiste en que los dos haces que engendran proyectivamente γ_1 y tienen sus centros en dos puntos comunes a γ_1 y γ_2 , corten la cónica γ_2 en puntuales superpuestas involutorias.

Después de detenernos brevemente en el N.º 1 sobre dicha particularidad, (la cual afecta las dos cónicas de manera simétrica), la aplicaremos en la parte siguiente del trabajo, para deducir construcciones relativas a una cónica, aprovechando la posibilidad de hacer coincidir γ_2 con un círculo.

1.-*Teorema.* — Si una cónica γ_1 presenta la particularidad ω respecto de otra cónica γ_2 , lo mismo sucede al intercambiarlas. Los dos polos de las dos involuciones generadoras, tienen respecto a su correspondiente cónica, una misma recta polar.

En primer término cabe observar lo siguiente:

a) Supongamos que la cónica γ_1 presenta la particularidad ω respecto de la γ_2 , es decir que los haces proyectivos que engendran la γ_1 desde dos puntos S, S' comunes a γ_1, γ_2 corten la γ_2 en pares de una involución I_2 . Tomemos sobre γ_1 un punto A , (fig. 1), y sean A_1, A'_1 las intersecciones ulteriores de $SA, S'A$

con γ_2 . De acuerdo con la hipótesis, los rayos $SA_1', S'A_1$ se cortan en un punto A' de γ_1 . Por consiguiente existe un cuadrilátero completo que tiene dos vértices opuestos en los dos puntos S, S' comunes a γ_1, γ_2 , dos vértices opuestos sobre γ_1 , y los dos restantes sobre γ_2 .

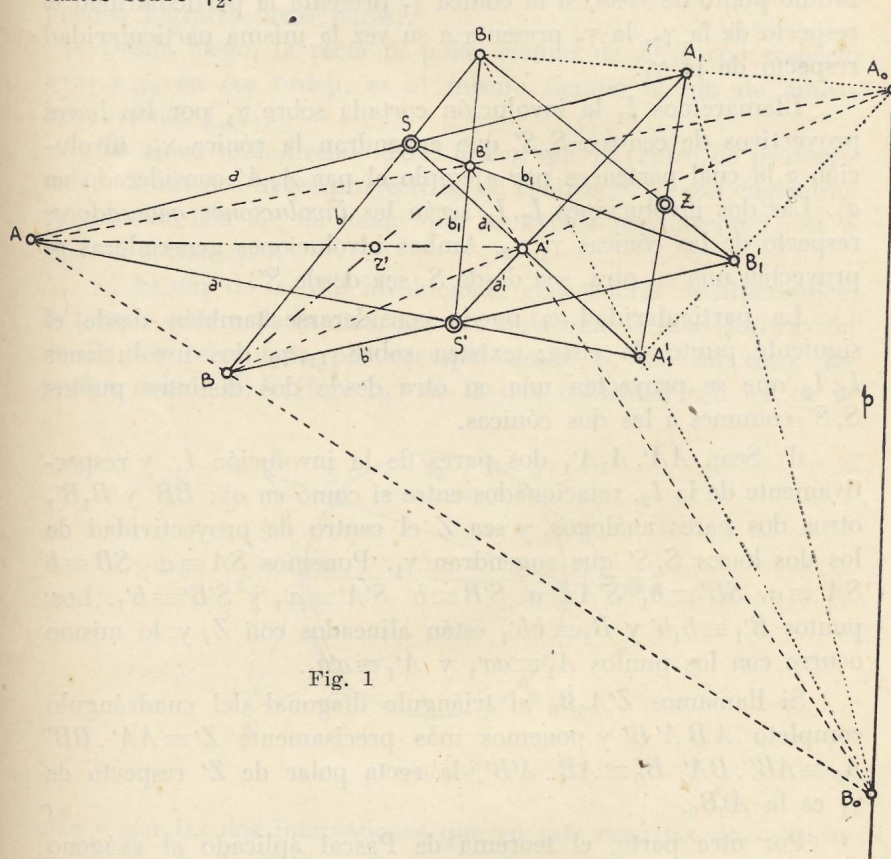


Fig. 1

b) Viceversa, si para dos cónicas γ_1, γ_2 , existe un cuadrilátero completo que tiene dos vértices opuestos en dos puntos S, S' comunes a las dos cónicas, y otro par de vértices opuestos sobre cada una de ellas, la cónica γ_1 presenta la particularidad ω respecto de la γ_2 ; en efecto, los dos haces de rayos de centros S, S' que engendran la cónica γ_1 cortan sobre γ_2 dos puntuales proyectivas superpuestas, en las cuales existe un par A_1, A_1' de puntos distintos que se corresponden de doble manera, y esto es suficiente para concluir que la proyectividad es una involución.

c) Por consiguiente, decir que γ_1 presenta la particularidad ω respecto de γ_2 equivale a decir que existe un cuadrilátero completo en las condiciones que acabamos de indicar. Debido a la forma simétrica en la cual las dos cónicas aparecen desde este último punto de vista, si la cónica γ_1 presenta la particularidad ω respecto de la γ_2 , la γ_2 presenta a su vez la misma particularidad respecto de la γ_1 .

Llamaremos I_1 la involución cortada sobre γ_1 por los haces proyectivos de centros S, S' que engendran la cónica γ_2 , involución a la cual pertenece por ejemplo el par A, A' considerado en a). Las dos involuciones I_2, I_1 serán las *involuciones generadoras* respecto de las cónicas γ_1, γ_2 . Ambas involuciones generadoras se proyectan una en otra, sea desde S , sea desde S' .

La particularidad ω puede considerarse también desde el siguiente punto de vista: existen sobre γ_1, γ_2 dos involuciones I_1, I_2 que se proyectan una en otra desde dos distintos puntos S, S' comunes a las dos cónicas.

d) Sean $AA', A_1A'_1$ dos pares de la involución I_1 , y respectivamente de la I_2 , relacionados entre sí como en a); BB' y $B_1B'_1$ otros dos pares análogos, y sea Z el centro de proyectividad de los dos haces S, S' que engendran γ_1 . Ponemos $SA \equiv a$ $SB \equiv b$ $SA' \equiv a'$ $SB' \equiv b'$ $S'A \equiv a'$ $S'B \equiv b'$ $S'A' \equiv a'_1$ y $S'B' \equiv b'_1$. Los puntos $B'_1 \equiv b_1b'$ y $B_1 \equiv bb'_1$ están alineados con Z , y lo mismo ocurre con los puntos $A'_1 \equiv aa'_1$ y $A_1 \equiv a'a_1$.

Si llamamos $Z'A_0B_0$ al triángulo diagonal del cuadrángulo completo $ABA'B'$ y ponemos más precisamente $Z' \equiv AA' \cdot BB'$ $A_0 \equiv AB' \cdot BA'$ $B_0 \equiv AB \cdot A'B'$, la recta polar de Z' respecto de γ_1 es la A_0B_0 .

Por otra parte, el teorema de Pascal aplicado al exágono simple $SBA'S'B'A$, inscripto en γ_1 , enseña que la recta A_1B_1 pasa por A_0 , y lo mismo la recta $A'_1B'_1$. Por igual razón pasan por B_0 las rectas $A_1B'_1$ y $B_1A'_1$; y como en el cuadrángulo $A_1B_1A'_1B'_1$ inscripto en γ_2 , el triángulo diagonal es el $Z'A_0B_0$, se desprende que Z es el polo de la recta A_0B_0 con respecto a la cónica γ_2 .

Pues bien; como Z' y Z son respectivamente los polos de las involuciones generadoras, concluimos que si dos cónicas γ_1, γ_2 , presentan la particularidad ω , los polos Z', Z de las involuciones

generadoras que existen sobre las mismas, tienen, respecto de las correspondientes cónicas, la misma recta polar p .

Además, las dos cónicas γ_1, γ_2 subordinan sobre la p una misma involución de puntos conjugados. (Porque $A_0 B_0$ son conjugados respecto de ambas cónicas, y de manera parecida pueden lograrse otros pares).

Desde luego, la recta p , polar común de Z', Z con respecto a γ_1 y γ_2 en ese orden, es al mismo tiempo el eje de ambas involuciones I_1, I_2 .

También se desprende de lo dicho, que el centro de proyectividad de los dos haces proyectivos de centros S, S' que engendran γ_2 coincide con Z' , de modo que las rectas tangentes a γ_2 en S y S' se cortan en Z' .

e) Si una de las dos involuciones generadoras es hiperbólica, lo mismo ocurre de la otra, por ser cada una de ellas proyección de la otra efectuada por ejemplo desde S . En tal caso, los puntos dobles H, K (fig. 1A) de la una coinciden con los de la

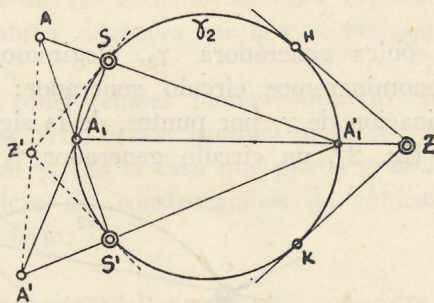


Fig. 1A

otra y con las dos intersecciones que en este caso las dos cónicas tienen, fuera de S, S' , y viceversa; de modo pues que en este caso $p \equiv HK$.

f) Entre las dos cónicas γ_1, γ_2 cabe considerar la proyectividad Π que resulta al referirlas como secciones del haz de centro S ; la misma puede considerarse como subordinada por una homografía Ω entre los dos planos superpuestos π_1, π_2 a los cuales pertenecen γ_1 y γ_2 . Análogamente puede definirse otra proyectividad Π' y otra homografía Ω' al reemplazar S por S' . El punto S' es unido para la homografía Ω y S lo es para la Ω' . En ambas homografías el polo Z' de la involución I_1 , considerado en

el plano π_1 tiene como correspondiente el polo de I_2 en π_2 , porque por ejemplo en Ω los puntos A, A', B, B' , tienen como correspondientes A_1, A'_1, B_1, B'_1 y luego a $Z' \equiv AA' \cdot BB'$ le corresponde $Z \equiv A_1 A'_1 \cdot B_1 B'_1$. Por consiguiente la recta p polar común de Z' respecto de γ_1 y de Z respecto de γ_2 , es unida en ambas homografías Ω, Ω' ; y la proyectividad que éstas subordinan sobre la p coincide con la involución de puntos conjugados — respecto de ambas cónicas, de acuerdo con lo ya expresado — que existe sobre p , porque por ejemplo los puntos A_0 y B_0 mencionados en $d)$ son al mismo tiempo correspondientes en dichas homografías y conjugados. En particular si existen los puntos H, K mencionados en $e)$, ellos son igualmente unidos para Ω, Ω' .

También cabe destacar que por ejemplo en la homografía Ω , dentro del haz de centro unido S' queda subordinada una proyectividad involutoria en la cual se corresponden los rayos que proyectan los pares de involución I_1 , o lo que da lo mismo, de la I_2 . En efecto, son rayos correspondientes $S'A \equiv S'A'_1$ y $S'A' \equiv S'A_1$.

2. - Como cónica generadora γ_2 , elegiremos siempre un círculo, que denominaremos círculo generador; y dado éste se logra la determinación de γ_1 por puntos, de la siguiente manera:

Sea dado (fig. 2), un círculo generador γ_2 , sobre el cual

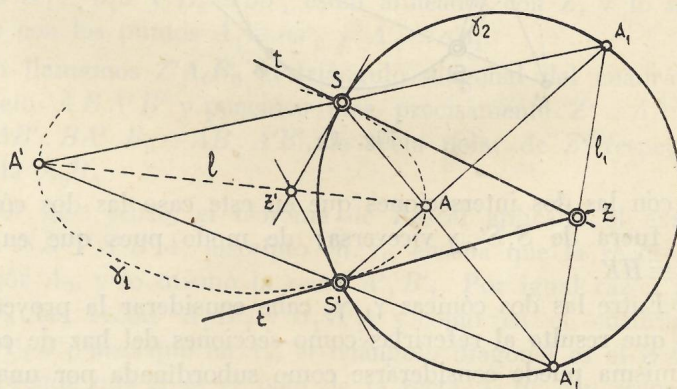


Fig. 2

ubicamos los puntos S y S' en forma arbitraria. En el plano π_2 de γ_2 , también en forma arbitraria, ubiquemos el punto Z , polo de la involución generadora. Queda así bien determinada la có-

nica γ_1 . Para evitar que γ_1 sea una cónica degenerada, lo que luego explicaremos, conviene que Z no pertenezca a γ_2 , ni esté alineado con los puntos S y S' .

La cónica γ_1 pasa por los puntos S y S' , con tangentes SZ y $S'Z$, y otros puntos ulteriores se determinan así: Trazemos por Z una recta cualquiera l_1 , que corta a γ_2 en los puntos A_1 y A'_1 . Proyectándolos desde S y S' obtendremos cuatro rayos, que dos a dos se cortan en los puntos A y A' que pertenecen a γ_1 . Por lo ya visto, A y A' deben estar alineados con el punto Z , intersección de las tangentes al círculo γ_2 en S, S' .

Con sólo variar la posición de la recta l_1 que pasa por Z , podemos determinar todos los puntos de γ_1 , de modo análogo al indicado. Se comprende fácilmente que variando cualquiera de los puntos S, S' y Z , o todos a la vez, la cónica γ_1 será en cada caso distinta.

Particularmente, si Z está alineado con S y S' , la cónica γ_1 degenera en dos rectas; una es la SS' y la otra es la polar de Z respecto de γ_2 . Estando Z sobre la circunferencia γ_2 , la cónica γ_1 también degenera en dos rectas, que son ahora las SZ y $S'Z$.

En estas construcciones hemos supuesto conocer el círculo γ_2 y los puntos S, S', Z . En cambio en el N.º 3 suponemos prefijada la cónica γ_1 . Es el caso que puede presentarse en la práctica para aplicar las construcciones de cónicas que damos en el presente trabajo.

3. - *Construcción del círculo γ_2 , conocidos cinco elementos que definen la cónica γ_1 .* — Sea pues conocida γ_1 , por ejemplo por las tangentes t y t' , sus puntos de tangencia S y S' y un punto ulterior A (fig. 3). Queda determinado $Z \equiv t.t'$. Desde los centros S y S' proyectamos el punto A , determinando $a \equiv SA$ y $a' \equiv S'A$. Por la mitad del segmento SS' , tracemos la normal m sobre la cual se hallará el centro C del círculo γ_2 que buscamos. Tracemos con centro en C_1 arbitrario sobre m , una circunferencia auxiliar que pase por los puntos S y S' . Sobre la misma, los rayos a y a' determinan los puntos A''_1 y A'' . Trazando ahora por Z una recta paralela a la $A''A''_1$, cortamos a los rayos a y a' en los puntos A'_1 y A_1 . Resulta claro ahora que los puntos S, S', A_1 y A'_1 pertenecen a γ_2 , y su trazado es inmediato, siendo C su centro.

La construcción falla si t es paralela a t' . El inconveniente se salva trazando por A la tangente t_a por cualquiera de los mé-

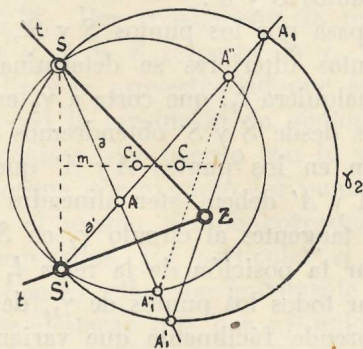


Fig. 3

todos conocidos, o el c) del N^o. 4, y procediendo en forma análoga a la explicada, con otro par de tangentes, las t, t_a o t', t_a .

4. - *Construcción de las tangentes en los puntos de la cónica.* — Sea una cónica γ_1 (fig. 4), de la cual conocemos un círcu-

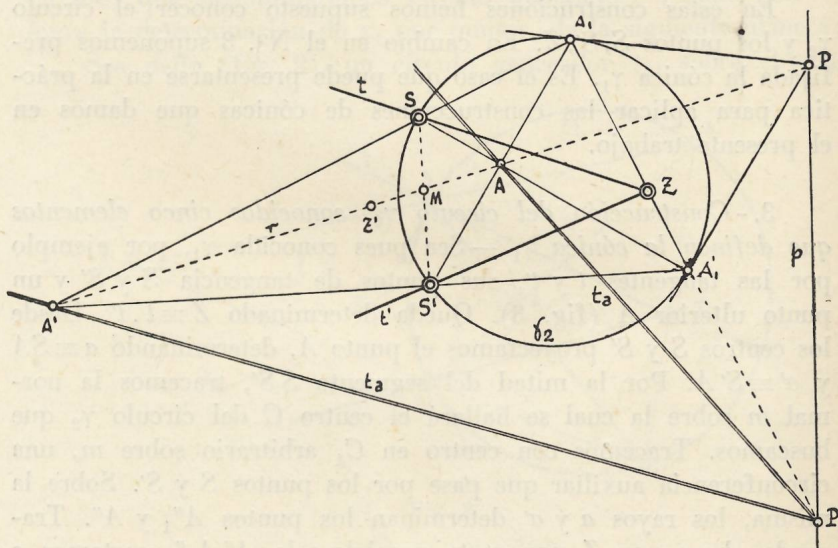


Fig. 4

lo generador γ_2 , y desde luego los puntos S, S' y Z . En la homografía Ω , al par de puntos A_1 y A'_1 alineados con Z , en el

círculo γ_2 , le corresponden en γ_1 , los puntos A y A' alineados con Z' .

Trazemos p , polar de Z respecto de γ_2 y de Z' respecto de γ_1 . Respecto de γ_1 , el punto $M \equiv SS' \cdot AA'$ tiene como polar la recta $A_1A'_1$ y luego el polo de la recta $AA' \equiv MZ'$ es el punto $A_1A'_1 \cdot p \equiv P_1$. Luego por condición de polaridad, las rectas $P_1A \equiv t_a$ y $P_1A' \equiv t'_a$ son las tangentes a γ_1 en los puntos A y A' respectivamente.

Intercambiando las cónicas entre sí, se ve claramente que el punto $P \equiv AA' \cdot p$ es polo de $A_1A'_1$ con respecto de γ_2 , y las rectas PA_1 y PA'_1 son tangentes a γ_2 en los puntos A_1 y A'_1 respectivamente. Los puntos P y P_1 son correspondientes en la homografía Ω , siendo a su vez P_1 el conjugado armónico de Z con respecto a los puntos A_1 y A'_1 , y P el conjugado armónico de Z' con respecto a los puntos A y A' .

Ya que puede estar P fuera de las dimensiones del dibujo, daremos un método para el trazado de tangentes, independiente de él.

b) Partimos del teorema conocido de geometría proyectiva que dice:

Un cuadrángulo completo inscripto en una cónica y el cuadrilátero completo de las tangentes en los vértices del cuadrángulo, tienen un mismo triángulo diagonal.

En la fig. 5, el cuadrángulo $SA S'A'$ inscripto en γ_1 , tiene

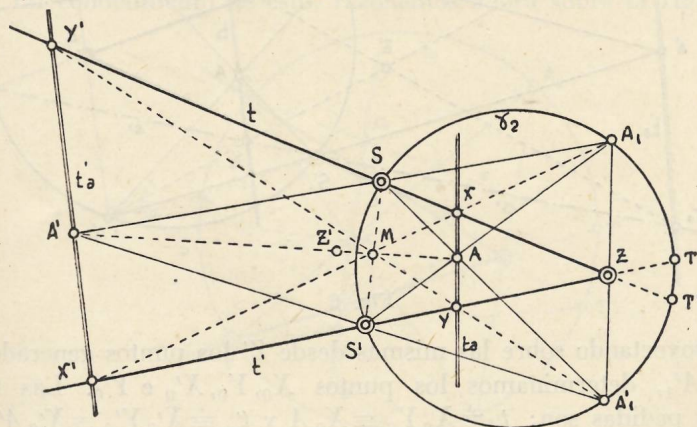


Fig. 5

por triángulo diagonal al $MA_1A'_1$. Al prolongar los lados MA_1 y MA'_1 hasta interceptar las tangentes t y t' a γ_1 en los puntos

S y S' respectivamente, obtenemos los puntos X y X' , e Y e Y' . Las tangentes pedidas en los puntos A y A' de γ_1 , son entonces las rectas $t_a \equiv XY \equiv XA \equiv YA$ y $t'_a \equiv X'Y' \equiv X'A' \equiv Y'A'$.

Podemos aclarar esto diciendo: En la cónica γ_1 , A'_1 es polo de la recta MA_1 (autopolaridad del triángulo $MA_1A'_1$). El punto S es polo de la tangente t en el mismo, de manera que X es polo de la recta $SA \equiv SA'_1$, siguiéndose necesariamente que XA es tangente en A . Idéntico razonamiento haríamos para los puntos X' , Y e Y' .

c) Expondremos a continuación un método que nos parece el más sencillo y práctico, absolutamente general.

Sea conocido de la cónica γ_1 , un círculo generador γ_2 y los puntos S y S' sobre el mismo, y el polo Z de la involución generadora. Se piden las tangentes t_a y t'_a en los puntos A y A' de γ_1 , alineados con Z' , y generados en la homografía Ω por el par de puntos A_1 y A'_1 de γ_2 , alineados con Z .

Tracemos, (fig. 6), las rectas auxiliares y fijas s y s' , definidas así: $s \equiv ST$ y $s' \equiv S'T'$, siendo T' y T las ulteriores intersecciones de las tangentes t y t' de γ_1 , en el círculo generador

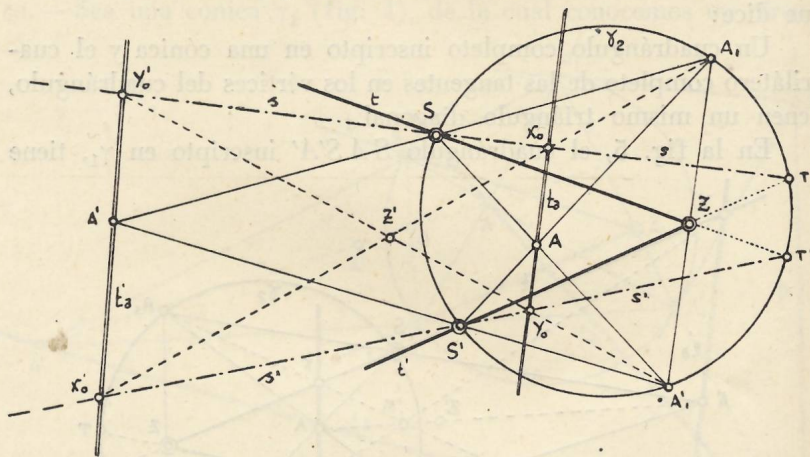


Fig. 6

γ_2 . Proyectando sobre las mismas desde Z' los puntos generadores A_1 y A'_1 , determinamos los puntos X_0, Y_0, X'_0 e Y'_0 . Las tangentes pedidas son: $t_a \equiv X_0Y_0 \equiv X_0A$ y $t'_a \equiv X'_0Y'_0 \equiv X'_0A'$.

Pasemos a demostrar que efectivamente esas rectas son las tangentes pedidas, razonando sobre la figura 7.

Como ya sabemos, Z' es polo de la recta SS' con respecto a

γ_2 , y $Q \equiv SS'$. $A_1A'_1$ resulta polo de la recta $AA' \equiv MZ'$. Se sigue que el triángulo $Z'MQ$ es autopolar con respecto a γ_2 . Luego el producto de las dos involuciones de polos M y Q , en un orden cualquiera, es la de polo Z' . La primera involución contiene los

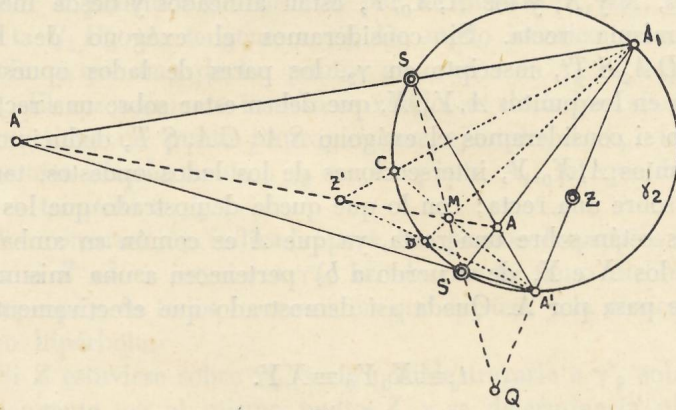


Fig. 7

dos pares A'_1C y A_1D , y la segunda el par A'_1, A_1 , y luego la tercera los pares C, A_1 y D, A'_1 . Con esto comprobamos que los puntos C y D (ulteriores intersecciones con el círculo γ_2 de las rectas que desde Z' proyectan los puntos A_1 y A'_1 generadores de los A y A' de γ_1 , en la homografía Ω) pertenecen respectivamente a las rectas $Z'A_1$ y $Z'A'_1$.

En conocimiento de esto, razonemos ahora sobre la figura 8,

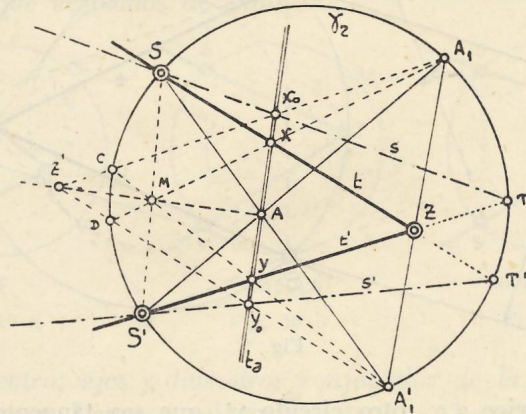


Fig. 8

en la que conservamos la notación de las dos figuras anteriores.

Vamos a demostrar que la recta X_0Y_0 es la recta XY ya mencionada en el apartado b), y por lo tanto la tangente en A .

Para demostrar que los puntos X_0, X, A, Y e Y_0 pertenecen a una misma recta, nos bastará demostrar que independientemente los Y_0, X y A , y los A, X_0, Y , están alineados y desde luego en una misma recta. Si consideramos el exágono de Pascal $SA'_1DA_1S'T'$, inscripto en γ_2 , los pares de lados opuestos se cortan en los puntos A, Y_0, X , que deben estar sobre una recta. Lo mismo si consideramos el exágono $SA'_1CA_1S'T$, deducimos que los puntos A, X_0, Y , intersecciones de los lados opuestos, también están sobre una recta; con lo que queda demostrado que los cinco puntos están sobre una recta, ya que A es común en ambas rectas, y los X e Y , de acuerdo a b) pertenecen a una misma recta que pasa por A . Queda así demostrado que efectivamente es:

$$t_a \equiv X_0Y_0 \equiv XY.$$

Análogo razonamiento haríamos para t'_a .

5. - *Criterio para determinar el género de la cónica γ_1 .*

Sea (fig. 9), una cónica γ_1 definida por las tangentes t y t' , sus puntos de tangencia S y S' y el círculo generador γ_2 . Trace-

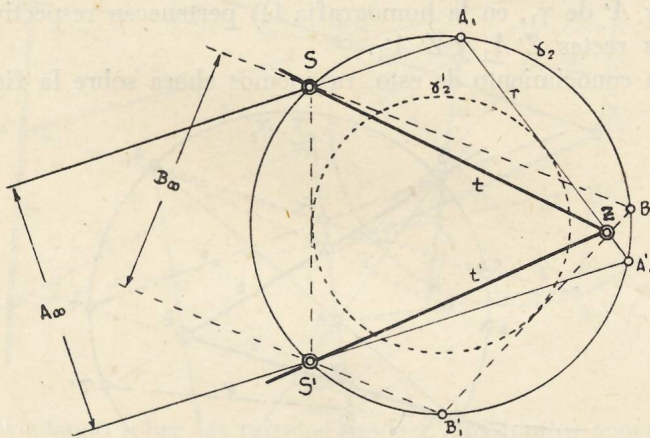


Fig. 9

mos concéntrico a γ_2 otro círculo γ'_2 que sea tangente a la recta SS' . Mediante la recta r que pasa por Z y es tangente a γ'_2 , determinamos sobre γ_2 el par de puntos generadores A_1 y A'_1 .

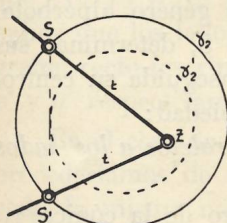
En la proyectividad Π , le corresponde sobre γ_1 otros dos puntos alineados con Z' , de los cuales uno, el A_∞ es impropio. En efecto; siendo por construcción el cuadrángulo $SS'A_1A'_1$ un trapecio isósceles, los rayos SA_1 y $S'A'_1$ resultan paralelos.

Por Z podemos buscar otro par de puntos B_1, B'_1 , tal que la recta $B_1B'_1$ sea tangente a γ'_2 . De modo idéntico al anterior, deducimos que uno de los puntos generados en γ_1 es impropio, el B_∞ . El razonamiento inverso es válido, es decir que si una cónica γ_1 tiene un punto impropio, por ejemplo el A_∞ , la recta SA_∞ corta ulteriormente a γ_2 en un punto A_1 , tal que la recta A_1Z es tangente a γ'_2 .

La construcción indicada para los puntos impropios de γ_1 , válida si Z no es interior a γ'_2 , brinda por lo tanto dichos puntos impropios en todos los casos en que existen, y la cónica es de género hipérbola.

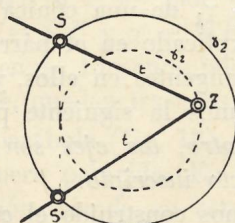
Si Z estuviese sobre γ'_2 , sería posible trazarle a γ'_2 solamente una tangente, en el mismo punto Z , y se determinaría ulteriormente sobre γ_1 un solo punto impropio. En ese caso la cónica γ_1 es una parábola; y finalmente si Z es interior a γ'_2 , no se pueden trazarle tangentes a ese círculo, y no teniendo la cónica γ_1 puntos impropios, es por consiguiente de género elipse. Particularmente y con referencia a este último caso, si Z ocupa el centro del círculo generador γ_2 , la cónica γ_1 es un círculo ortogonal al anterior en los puntos S y S' .

En las figuras 10 a, b, c, están esquematizados los distintos casos que acabamos de explicar.



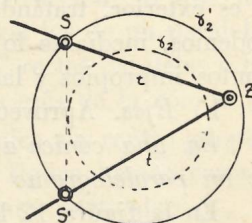
ELIPSE

Fig. 10 a



PARABOLA

Fig. 10 b



HIPERBOLA

Fig. 10 c

6. - Centro, ejes y diámetros conjugados de la cónica γ_1 . —

a) Centro. Vamos a referirnos a la fig. 11, en la cual conocemos un círculo generador γ_2 , los puntos S, S' y Z de cierta cónica γ_1 . Nos proponemos hallar el centro de γ_1 . Para ello

tracemos por Z una recta que determina sobre γ_2 el par de puntos A_1 y A'_1 tal que se cumpla $ZA_1 = ZA'_1$, es decir en otras palabras $A_1A'_1 \perp CZ$. Determinados sobre γ_1 el par de puntos A y A' , correspondientes a los A_1 y A'_1 en la homografía Ω , y recordando aquí lo explicado en el párrafo 4 a), las tangentes t_a y t'_a son paralelas, y a su vez paralelas a $A_1A'_1$, para esa posición especial del segmento $A_1A'_1$. En efecto: las rectas t_a , t'_a y $A_1A'_1$ deben ser concurrentes todas en P_1 (fig. 4), que ahora es impropio, por ser Z el centro del segmento $A_1A'_1$. Siendo t_a/t'_a el segmento AA' es un diámetro de la cónica γ_1 , y por lo tanto el centro C' de la misma, se halla en la mitad de AA' .

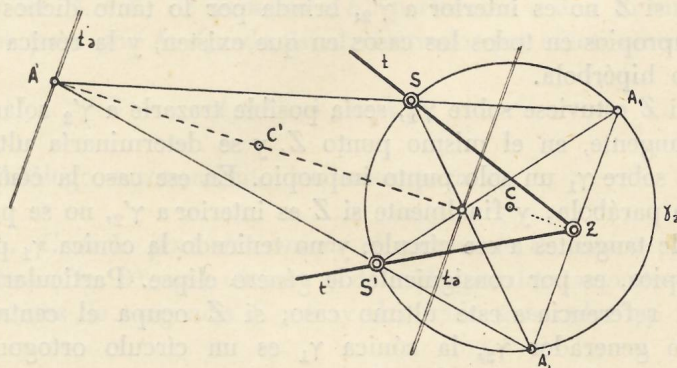


Fig. 11

Este sencillo método sólo es aplicable si Z es interior a γ_2 ; si es exterior, tratándose γ_1 de una cónica de género hipérbola, podemos, mediante lo explicado en el párrafo 5, determinar sus puntos impropios y las tangentes en ellos, y enseguida su centro.

b) *Ejes*. Aprovechamos la siguiente propiedad:

En una cónica a centro, los ejes son paralelos a los lados de un paralelogramo recto inscripto.

En la figura 12 hemos construido el centro de la cónica γ_1 . En la homografía Ω' las rectas AA' y $A_1A'_1$ son correspondientes. La recta $a \equiv AA'$ contiene el centro C' de γ_1 , en el plano π_1 . Luego en el plano π_2 la recta $A_1A'_1$ debe contener el punto C'' , que corresponde a C' en la homografía Ω' ; el punto C'' puede construirse de la manera siguiente: Si desde S proyectamos C' , el rayo $c \equiv SC'$ cortará a γ_2 en R_1 . La ulterior intersección de la recta R_1Z con γ_2 es R'_1 , y el rayo $c_1 \equiv SR'_1$ es el rayo corres-

pendiente del c , dentro del haz de centro S , unido para la homografía Ω' .

Estando determinado $C' \equiv a \cdot c$, C'' se hallará en la intersección de las rectas correspondientes, o sea $C'' \equiv a_1 \cdot c_1$.

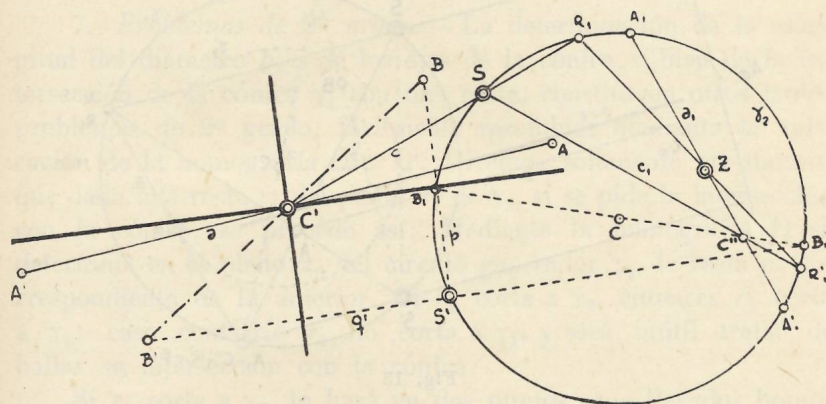


Fig. 12

A toda recta de γ_2 que pase por C'' le corresponde en γ_1 un diámetro. De todas las rectas posibles por C'' elijamos la que contiene el centro C del círculo γ_2 . A los puntos B_1 y B'_1 sobre γ_2 , le corresponden en la homografía Ω' los puntos B y B' sobre γ_1 , extremos del diámetro BB' . (Para aclarar la figura hemos suprimido los rayos constructores).

Pero los segmentos BS' y $B'S'$ forman un ángulo recto, ya que $\angle B_1S'B'_1 = \angle BS'B' \equiv 90^\circ$ por construcción, lo que nos indica que los lados $p' \equiv S'B$ y $q' \equiv S'B'$ son los de un paralelogramo recto inscripto en γ_1 . Llevando por C' rectas paralelas a las p' y q' respectivamente, quedan trazados los ejes de la cónica γ_1 .

En el caso de la parábola (fig. 13), cónica sin centro propio, procederíamos de manera parecida. En la figura hemos conservado la misma notación, siendo en este caso particular A'_∞ el punto que antes llamamos A' , lo que permite determinar la dirección del eje, que será la misma de A'_∞ . Podemos ahora trazarlo como mediatriz del segmento $S'B \equiv p'$, que los lo visto, es perpendicular al eje.

c) *Diámetros conjugados.* La construcción de los diámetros conjugados resulta ahora inmediata. En la fig. 14 hemos repetido en parte la fig. 12, donde damos por determinado el centro

C' de la cónica γ_1 y el correspondiente punto C'' en γ_2 , mediante la aplicación de la homografía Ω' .

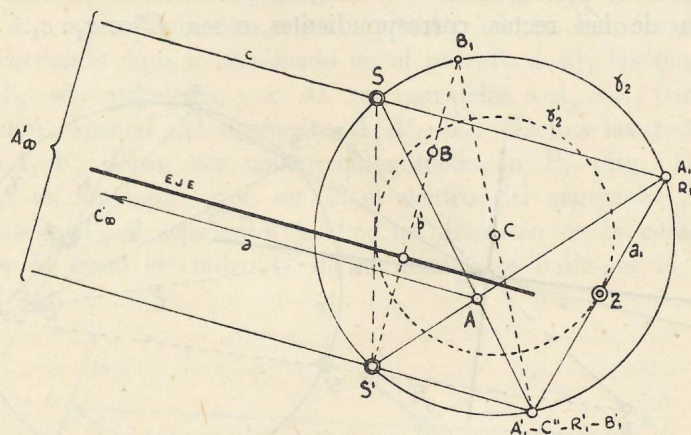


Fig. 13

Ya dijimos que a toda recta que pase por C'' del plano π_2 de γ_2 , le corresponde en el plano π_1 un diámetro de la cónica γ_1 . Sea pues una recta cualquiera que pase por C'' , determinando so-

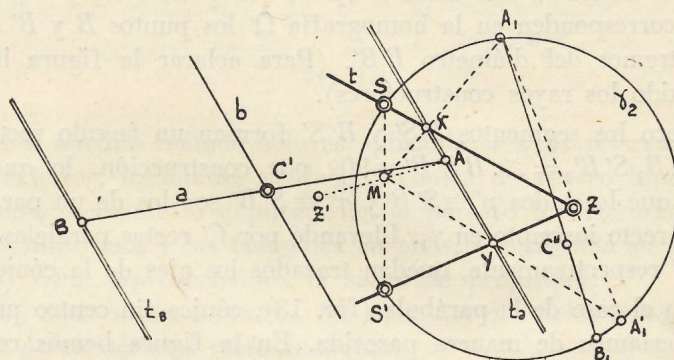


Fig. 14

bre γ_2 los puntos A_1 y B_1 . Construídos los puntos A y B sobre γ_1 que le corresponden en la homografía Ω' , la recta $a \equiv AB$ es un diámetro de la cónica γ_1 . Para hallar b , el diámetro conjugado del a , tracemos las tangentes en A o B , (que serán paralelas), con cualquiera de los métodos explicados en el párrafo 4. En la fig. 14 hemos aplicado el método 4-b).

Conocida la tangente, basta trazar por C' la paralela, para que quede determinado b , diámetro conjugado del a .

De manera análoga podemos determinar cualquier par de diámetros conjugados.

7. - *Problemas de 2º grado.* — La determinación de la magnitud del diámetro b , o de los ejes de la cónica, o bien de la intersección de la cónica γ_1 con una recta, constituyen otros tantos problemas de 2º grado, fácilmente resolubles mediante la aplicación de la homografía Ω o Ω' . Diremos solamente en síntesis, que dada una recta r_1 del plano π_1 de γ_1 , si se pide la intersección con la cónica, se procede así: Mediante la homografía Ω se determina en el plano π_2 del círculo generador γ_2 , la recta r_2 correspondiente de la anterior. Si r_2 corta a γ_2 , entonces r_1 corta a γ_1 ; caso contrario r_1 no corta a γ_1 , y será inútil tratar de hallar su intersección con la cónica.

Si r_2 corta a γ_2 , lo hará en dos puntos, que llevados homográficamente al plano π_1 nos darán los puntos correspondientes, que estarán sobre r_1 y γ_1 , es decir en la intersección pedida.

El trazado de un par de tangentes a γ_1 desde un punto exterior, es un problema de iguales características que el anterior, que se resuelve análogamente aplicando la homografía Ω .

En todas estas construcciones, (en cuanto no intervengan caso por caso condiciones particulares más sencillas), para encontrar el punto o la recta que corresponde mediante la homografía Ω o Ω' a un punto o una recta dada, se aplica oportunamente lo dicho en el párrafo 1-f).

PROPIEDADES DEL CUADRANGULO BASE DE UN HAZ DE CONICAS

por

BEPPPO LEVI

Creo de interés para el lector presentarle algunas observaciones que se vinculan, en principio, con la nota que antecede del Ing. José Mateo, pero acrecentan notablemente el significado teórico del argumento.

Es conocido que dadas en dos planos dos cuaternas ordenadas de puntos tales que en cada cuaterna no haya tres alineados, existe una y una sola homografía entre los dos planos que transforma una cuaterna en la otra. Tomando por una de las cuaternas la de los puntos (reales o no) comunes a dos cónicas y por la otra una formada por dos puntos reales arbitrarios y por los dos puntos cíclicos, se concluye que cada par de cónicas⁽¹⁾ se transforma homográficamente en un par de círculos y, más generalmente, cada haz de cónicas en un haz de círculos con dos puntos bases reales; y precisamente existen 24 transformaciones tales, correspondientemente a las 24 permutaciones de los 4 puntos bases.

En un haz de círculos con puntos bases distintos existe una involución de círculos ortogonales; se sigue que en cada haz de cónicas circunscripto a un cuadrángulo no degenerado existe un cierto número (que vamos a determinar) de involuciones caracterizadas por el hecho que los pares de cónicas conjugadas realizan una relación particular que es la transformada homográ-

(¹) Se sobreentiende que las cónicas consideradas deben suponerse no tener entre sí contacto triple para que tengan dos puntos distintos comunes que se transformaran en los cíclicos; si se quiere que la transformación sea real se debe excluir también el caso de que las cónicas se oscularan en un punto, cortándose en otro.

fica de la relación de ortogonalidad entre círculos, consistiendo en el hecho que las tangentes a dichas cónicas en cada uno de los puntos bases forman una involución cuyas rectas dobles son las que proyectan los otros dos puntos bases; por lo tanto dichos pares de tangentes son armónicos con esas rectas. Es fácil ver que esta relación es la misma que el Ing. Mateo llama *propiedad ω* , con la sola diferencia que no hay necesidad de que una de las cónicas sea círculo ⁽¹⁾. Si a la relación hay que dar un nombre, propondríamos luego con preferencia el de cónicas *seudoortogonales*.

Por lo dicho podría suponerse que esas involuciones fueran 24, pero es inmediato que se obtiene la misma cuando se permutan los dos puntos bases que se suponen correspondientes de los puntos cíclicos, o bien se permutan los otros dos, lo que rebaja el número de 24 a 6. Ahora es fácil mostrar que no cambia la involución también cuando, habiendo primitivamente elegido un par de puntos como correspondientes de los cíclicos, se lo cambia por el par de los dos restantes. Una demostración muy simple de esta propiedad se obtiene refiriéndose a la anterior observación que la relación de ortogonalidad de dos círculos se puede expresar diciendo que sus tangentes en un punto base propio forman cuaterna armónica con las rectas que de este punto proyectan los dos puntos cíclicos; esta cuaterna está cortada por la recta de los centros en una cuaterna armónica de puntos de los cuales dos son los centros de los círculos y los otros dos son puntos diagonales imaginarios del cuadrángulo base del haz de círculos; si esta cuaterna se proyecta de un punto cíclico, se obtiene un haz armónico en el cual dos rectas son las tangentes a los dos círculos considerados en dicho punto cíclico (rectas por los centros de los círculos), y las otras dos proyectan de este punto los dos puntos bases reales. Brevemente *dos círculos ortogonales en un par de puntos reales son seudoortogonales en los puntos cíclicos y recíprocamente*.

Resulta luego que *en un haz de cónicas existen solamente 3 involuciones distintas de cónicas seudoortogonales*.

⁽¹⁾ El Sr. Mateo explica esta elección por un fin *constructivo*, puesto que tal fué el propósito que él se propuso; algunas, aunque posiblemente no todas, de las construcciones propuestas presentan en efecto algunas ventajas para disposiciones particulares de los datos.

Estas 3 involuciones se pueden coordinar a los tres lados del triángulo autopolar del haz por la propiedad que cada punto de uno cualquiera de estos lados es punto de concurrencia de las tangentes a una determinada cónica del haz en uno de los pares de puntos bases que están sobre los lados del cuadrángulo fundamental que se cortan en el vértice opuesto y punto de concurrencia de las tangentes a la correspondiente cónica pseudoortogonal en el otro par análogo. Esta posición particular de dos cónicas se encuentra ya considerada en la literatura bajo la forma de pares de cónicas tales que las 8 tangentes en los puntos comunes tienen en común, fuera de estos puntos, dos puntos solamente⁽¹⁾.

De lo dicho resulta que estos pares de puntos forman, sobre el lado considerado del triángulo autopolar, una involución de puntos; cada par de puntos conjugados de esta involución tiene la curiosa propiedad de que, elegido arbitrariamente un par de cónicas pseudoortogonales de la serie coordinada a dicho lado, la polar de uno de estos puntos respecto una de las cónicas coincide con la polar del otro respecto de la otra cónica; estas polares coincidentes son evidentemente dos, según el modo como se establece la correspondencia entre el par de polos y el par de cónicas. Variando luego el par de puntos o el par de cónicas, en sus respectivas involuciones, nace así una involución de rectas en el haz que tiene por centro el vértice opuesto del triángulo autopolar, en la cual un par está constituido por los dos lados opuestos del cuadrángulo fundamental del haz de cónicas y las rectas dobles son los otros dos lados del triángulo autopolar. Puede demostrarse esta propiedad con un breve cálculo analítico en el caso de círculos ortogonales; pero el lector podría tratar de demostrar las propiedades aludidas y posiblemente otras que el examen de

(1) V. p. ej. BAKER, *Principles of Geometry*, vol. II (2ª ed., Cambridge, 1930) Ejerc. 19, p. 42-44; en el Ejerc. 25, p. 48-49 se da también un *teorema de Gaskin* en el cual aparecen cónicas que están en la posición de pseudoortogonalidad respecto de cierta cónica oportunamente definida; puede verse que se trata del sistema doblemente infinito que generaliza el de los círculos ortogonales a uno dado o, en otros términos, que tienen potencia constante respecto un dado punto. Análogamente se ve que son pseudo-ortogonales dos cónicas cuando la envolvente de las rectas que las cortan en una cuaterna armónica degenera en un par de puntos. Este problema se encuentra considerado por SALMON - *Sections coniques* (3me édit. p. 595).

Estas indicaciones bibliográficas fueron proporcionadas por el prof. ALEJANDRO TERRACINI.

la relación considerada pudiera revelar, por vía puramente sintético-proyectiva. Es evidente también que dos pares cualesquiera elegidos en las dos involuciones que corresponden a dos vértices del triángulo definen, con sus puntos de intersección, un cuadrángulo en las condiciones enunciadas.

Debe notarse que cada una de las propiedades enunciadas puede aceptarse como definición de la relación de pseudoortogonalidad, y la última se vincula a las elementales propiedades armónicas del cuadrángulo alejándose completamente de las propiedades métricas iniciales.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA

CALCULO DE $\sqrt{N}$ MEDIANTE UNA FRACCION CONTINUA GENERALIZADA

por

AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA

No hemos encontrado en la literatura matemática a nuestro alcance consideraciones análogas a las que siguen. Como nos han parecido interesantes, no obstante ser elementales, las ponemos a consideración del lector, aunque es posible que hayan sido tratados en algún otro lugar.

Dado un número real $N > 1$, indiquemos con α un entero tal que $\alpha^2 < N$; será pues

$$\sqrt{N} = \alpha + \beta$$

indicando con β un número real > 0 . Luego

$$N = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \therefore N - \alpha^2 = (2\alpha + \beta)\beta;$$

por consiguiente

$$\beta = \frac{N - \alpha^2}{2\alpha + \beta}$$

e iterando

$$\beta = \frac{N - \alpha^2}{2\alpha + \frac{N - \alpha^2}{2\alpha + \dots}}$$

y finalmente

$$\sqrt{N} = \alpha + \frac{N - \alpha^2}{2\alpha + \frac{N - \alpha^2}{2\alpha + \dots}}$$

Convergencia de la fracción continua. Sea r_n la reducida n -ésima de β

$$r_n = \frac{N-\alpha^2}{2\alpha+\dots} \dots \frac{N-\alpha^2}{2\alpha}.$$

Evidentemente:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{N-\alpha^2}{2\alpha+r_{n-1}} \\ r_n - r_{n-1} &= \frac{N-\alpha^2}{2\alpha+r_{n-1}} - \frac{N-\alpha^2}{2\alpha+r_{n-2}} \\ &= -(r_{n-1} - r_{n-2}) \cdot \frac{N-\alpha^2}{(2\alpha+r_{n-1})(2\alpha+r_{n-2})}. \end{aligned} \quad (1)$$

Para estudiar la convergencia, estableceremos la siguiente acotación: siendo, para todos los n , $r_n > 0$, se tiene:

$$|r_n - r_{n-1}| \leq |r_{n-1} - r_{n-2}| \cdot \frac{N-\alpha^2}{4\alpha^2},$$

de donde:

$$|r_n - r_{n-1}| \leq \left(\frac{N-\alpha^2}{4\alpha^2} \right)^{n-2} \cdot |r_2 - r_1|. \quad (2)$$

Ahora de

$$r_m = r_1 + \sum_{i=2}^m (r_i - r_{i-1}),$$

se deduce:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = r_1 + \sum_{i=2}^{\infty} (r_i - r_{i-1}). \quad (3)$$

Por (2) resulta que esta serie es absolutamente convergente si

$$\frac{N-\alpha^2}{4\alpha^2} < 1 \quad \text{o sea} \quad N < 5\alpha^2.$$

Se verifica fácilmente que la condición

$$\alpha^2 < N < 5\alpha^2, \quad \alpha \text{ entero}$$

puede siempre realizarse en la hipótesis de $N > 1$; queda por tanto demostrada la convergencia de la fracción continua, aun con una cierta arbitrariedad en la elección del entero α .

Acotación del error cometido, calculando $\sqrt{N}$ mediante la n -ésima reducida. La fórmula (1) demuestra que la serie (3) es de términos de signos alternados. Se sigue que el error cometido parándose a la reducida r_{n-1} es menor que $|r_n - r_{n-1}|$.

Se tiene

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= \frac{N-\alpha^2}{2\alpha} - \frac{N-\alpha^2}{2\alpha + \frac{N-\alpha^2}{2\alpha}} \\ &= (N-\alpha^2) \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{3\alpha^2+N} \right) = \frac{(N-\alpha^2)^2}{2\alpha(3\alpha^2+N)} < 2\alpha \cdot \left(\frac{N-\alpha^2}{4\alpha^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la (2) resulta luego

$$|r_n - r_{n-1}| = \varepsilon_n < \left(\frac{N-\alpha^2}{4\alpha^2} \right)^n \cdot 2\alpha.$$

FEDERIGO ENRIQUES

por

B. LEVI

En los primeros días de julio fuimos sorprendidos por la infausta noticia de que había fallecido en Roma Federigo Enriques, cuyo nombre sin duda está y estará grabado en la memoria y en el pensamiento de gran parte de nuestros lectores; no solamente como representante preeminente de una escuela geométrica italiana, sino también por las dotes excepcionales de su trato afable, de su cultura ecléptica, de su conversación franca y variada. Una visita que hizo Enriques a los países de América Latina hace poco menos de veinte años está recordada aquí por muchos con sentimientos de la más viva satisfacción, y yo puedo dar testimonio del grato recuerdo que él siempre conservó de la corta estadía trabando amistades con los matemáticos bonaerenses, de la cual más de una vez se complacía en la conversación memorar anécdotas.

La inteligencia brillante, la viva imaginación matemática, la característica simpatía recíproca para con los jóvenes, tuvo por efecto que un grupo numeroso de los que se orientaban hacia la matemática en los primeros decenios del siglo se congregaran alrededor de él, de lo que son testimonios las colaboraciones en distintas publicaciones por él organizadas, como la colección de volúmenes de historia y filosofía de la matemática y la pequeña enciclopedia «*Questioni riguardanti la matematica elementare*», y aún en trabajos de más estricta investigación; de tal manera que muchos son los matemáticos, especialmente geómetras, que en el último medio siglo pueden llamarse sus alumnos; y no solamente entre los italianos, sino también entre los extranjeros que iban a Roma a perfeccionar sus estudios. He aquí palabras de una carta recién recibida de un ilustre matemático belga, Lucien Godeaux, que después de aludir a buenas noticias recibidas añade como postscriptum: «*Cruelle ironie du sort. Je vous écrivais cette lettre hier soir. Au moment de la mettre à la poste, j'apprends la mort de mon vénéré maître Enriques, survenue le 14 juin dernier*».

Recibido de doctor en matemática en Pisa, en 1891, al cumplir solamente los 20 años de edad, Enriques empieza en seguida su carrera de investigador en la teoría geométrica de las transformaciones birracionales de las superficies algebraicas en cuyos problemas, como le placía recordar, había sido iniciado por las fraternales conversaciones con Guido Castelnuovo, poco más anciano que él y con el cual comparte el mérito de haber puesto los fundamentos y haber obtenido los más decisivos resultados en este capítulo de la geometría algebraica; en efecto, en 1896 Enriques ya podía presentar un grupo de importantes trabajos que le valían el nombramiento de profesor de geometría en la Universidad de Bolonia, y cuyos resultados, conjuntamente con otros obtenidos en el mismo período por Castelnuovo, permitían a los dos autores presentar una exposición orgánica en algunas memorias célebres, primero (1897) en los *Mathematische Annalen*, luego (1900) en los *Annali di Matematica*. Todavía una exposición sistemática fué publicada por Castelnuovo y Enriques en 1914 con el artículo *Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen* aus de la *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. Nunca el argumento fué abandonado por Enriques en los años sucesivos, escogiendo frecuentemente en uno u otro problema que la teoría ofrece los temas para sus clases de geometría superior; testimonio de esta continuidad son los volúmenes *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* redactado en 1931 por L. Campedelli y *Le superficie razionali* redactado en compañía de F. Conforto que, ya impreso a fines de 1937, por razones editoriales fué presentado al público con el nombre solo del alumno y colaborador.

La teoría aludida supone como antecedente el conocimiento de la general teoría proyectiva de las variedades algebraicas y la teoría de las transformaciones birracionales de las curvas algebraicas, que habían sido principalmente elaboradas en la segunda mitad del siglo anterior. Para ofrecer al estudioso esta preparación, Enriques emprendió en 1915, conjuntamente con un alumno querido, Oscar Chisini, la publicación de un tratado con el título *Teoria geometrica delle equazioni algebriche*, obra en 4 volúmenes, que se prolongó muchos años.

Mientras tanto la atención de Enriques se dirigía también hacia otro argumento. En el último decenio del siglo pasado había alcanzado extraordinario interés el análisis de los fundamentos

de la geometría proyectiva. La adaptación en forma didáctica de estas investigaciones atrajo la atención del joven profesor dando lugar a la publicación de sus *Lezioni di Geometria Proiettiva*, cuya primera edición se publicó por Zanichelli en 1898 y que siguió reeditándose hasta años muy recientes (la 5ª edición lleva la fecha de 1926), siendo también traducida al alemán y al francés y sirviendo de modelo para tratados análogos de otros autores. Fueron ciertamente las mismas influencias espirituales las que le impulsaron también hacia el análogo problema didáctico respecto de la geometría elemental, que poco antes, aunque con criterios muy diferentes, habían intentado también Veronese y Gazzaniga y que antes todavía, aunque sólo en algunos años y sobre planos más abstractos y de menor preocupación práctica, habían dirigido los trabajos de Pasch, Peano, Hilbert. Nació así el curso de *Geometria elementale* para las escuelas medias, redactado en compañía de U. Amaldi, que, publicado por primera vez en 1904, tuvo la suerte de una acogida entusiasta por parte de muchos profesores de las escuelas secundarias italianas, con un éxito que siguió afirmándose por 35 años sucesivos, no en Italia solamente, sino también en el extranjero. Fué ciertamente un éxito editorial, —continuado también con la publicación de otros menores libros didácticos— el cual sin embargo no fué aprovechado por Enriques como un comercio, sino que más bien sirvió para estrechar y consolidar la armonía entre el autor en persecución de fines ideales y el editor que fácilmente concedía su concurso para otras publicaciones financieramente menos prometedoras. Pudo así Enriques proseguir la publicación del *Periodico di Matematica* inicialmente fundado por Lazzeri, elevando el tono de sus artículos y la cautivadora elegancia editorial y ofreciéndolo todavía como órgano de la Asociación Mathesis; y pudo pasar a Zanichelli la colección de monografías que poco antes he recordado, *Per la storia e la filosofia delle matematiche*, iniciada en Roma por la editorial Stock, mas que, por su naturaleza, no podía dirigirse a un público de lectores muy extenso. Bajo la dirección de Enriques fué publicada en esta colección, con la colaboración de varios alumnos suyos, la versión crítica italiana de los Elementos de Euclides; por O. Zariski, a la sazón alumno extranjero de Enriques, la versión comentada de los opúsculos de Dedekind sobre los fundamentos de la noción de número; por M. Lombardini la traducción del opúsculo sobre la Forma de la Tierra de Clairaut y muchos otros más, sobre los cuales no vale insistir.

Ya recordamos al principio las *Questioni riguardanti la matematica elementare*, cuya compilación Enriques distribuyó entre varios alumnos, dirigiendo de esta manera, con intención manifiesta, la atención de cada uno a profundizar algún capítulo determinado en el cual pudiera desarrollarse su personalidad y reservando para sí algunos capítulos que mayormente le interesaban por el contenido filosófico.

A la misma orientación pertenece también el artículo *Prinzipien der Geometrie* que Enriques publicó en la *Encyclopädie der mathem. Wissenschaften*.

El discurso nos ha llevado así posiblemente al último aspecto que ofrece a nuestra atención la poliédrica actividad de Federigo Enriques; quiero decir a sus estudios sobre filosofía de la ciencia y sobre la teoría del conocimiento. Sus *Problemi della scienza*, traducidos en varios idiomas, son bien conocidos; ellos reflejan las mismas inquietudes epistemológicas sobre el origen y el valor de nuestra ciencia que han caracterizado en el último cuarto del siglo pasado a las teorías de economía del pensamiento de Mach, a las, un poco más logicistas, de Poincaré y a las, posiblemente un poco más experimentalistas, del nuestro; y posiblemente, pues todo el pensamiento es concatenación, fué este mismo orden de investigaciones el que le impulsó hacia el estudio crítico de los antiguos fisiocráticos griegos para encontrar en la manifestación histórica, aunque acaso demasiado fragmentaria por la corrosión de los siglos, el apoyo o el rechazo de las teorías preconcebidas. Después de los «problemi» viene *Scienza e razionalismo* (1912), *Per la storia della logica* (1922), *Storia del pensiero scientifico* (1932) y un *Compendio* (1937) publicados en unión con G. Díaz de Santillana, (en parte también en fascículos sueltos y en traducción francesa en las *Actualités Scientifiques* de la editorial Hermann), *Le matematiche nella storia e nella cultura* (1938), además de las colaboraciones en la *Enciclopedia Italiana* (Treccani) y en la revista *Scientia*, de las cuales fué codirector.

Y paramos aquí nuestra rápida reseña de recuerdos y pensamientos vividos, que se acompaña a la evocación de las horas pasadas en amable conversación en la casa del maestro y amigo, siempre abierta y siempre hospitalaria.

Nació Federigo Enriques en Liorna el 5 de enero de 1871; desde 1892 hasta 1938 enseñó ininterrumpidamente geometría

proyectiva y geometría superior en las Universidades de Bolonia antes y de Roma después; socio de la Società Italiana delle Scienze (dei XL), socio nacional de la Accademia dei Lincei, socio benedettino de la Accademia dell'Istituto di Bologna, socio correspondiente de la Accademia delle Scienze di Torino, y del Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, socio también de varias academias extranjeras. Por razones que todos conocen a fines de 1938 tuvo que renunciar a toda actividad italiana, y en 1944 pudo tener la satisfacción de recobrar públicamente la posición de honor que en los ánimos no había perdido nunca. Falleció en Roma el 14 de junio de 1946.

En seguida, entre los alumnos y amigos, se formó un comité presidido por Guido Castelnuovo, presidente de la Clase de Ciencias de la reconstituída Academia *dei Lincei*, para honrar a su memoria en el mismo espíritu de dedicación a la ciencia y a la juventud en el cual él había vivido.

He aquí, para terminar, las frases iniciales del manifiesto, que encontrarán ciertamente amplio eco también fuera de Italia:

AGLI AMICI, AI COLLEGHI, AGLI ALLIEVI DI FEDERIGO ENRIQUES

Il 14 di giugno 1946 si è spento in Roma nella sua abitazione di via Sardegna 50, FEDERIGO ENRIQUES, insigne matematico della nostra epoca, filosofo e storico della scienza. Maestro nel senso più alto della parola, suscitò con la sua scuola fervore di ricerche, formando discepoli italiani e stranieri, che recano in sé l'impronta indelebile del suo insegnamento.

Un gruppo di Suoi allievi, ricordando quanto Egli fosse sempre vicino ai giovani, pensa che la forma migliore per onorare la memoria del Maestro sia la costituzione di un "*Fondo Federico Enriques*" destinato a incoraggiare alcuni dei suoi giovani discepoli, cui le attuali contingenze renderebbero estremamente difficile la carriera scientifica.

ROSARIO, ISTITUTO DE MATEMÁTICA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 91 — Demostrar que cualquier número entero ≤ 312 se puede expresar en la forma

$$c_0 + c_1 5 + c_2 5^2 + c_3 5^3$$

donde c_0, c_1, c_2, c_3 toman los valores $0, \pm 1, \pm 2$.

SOLUCIÓN. — Vemos inmediatamente que 312 es el mayor número expresable en esta forma, pues haciendo $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 2$ resulta el número 312.

Vamos a demostrar ahora la siguiente proposición: todos los múltiplos de la potencia $(n-1)$ -ésima de 5 se pueden expresar en la forma

$$k_{n-1} 5^{n-1} = k_n 5^n + c_{n-1} 5^{n-1} \quad (1)$$

siendo c_{n-1} uno de los valores $0, \pm 1, \pm 2$.

En efecto, sea el múltiplo $k_{n-1} 5^{n-1}$. Dividiendo k_{n-1} por 5 y siendo q_n el cociente y r_{n-1} el resto, es $k_{n-1} = q_n 5 + r_{n-1}$, o sea,

$$k_{n-1} 5^{n-1} = q_n 5^n + r_{n-1} 5^{n-1}.$$

Por ser $0 \leq r_{n-1} \leq 4$, si $r_{n-1} \leq 2$ ya se tiene la forma (1); si $r_{n-1} > 2$ se puede poner $r_{n-1} = 5 - r'_{n-1}$ con $r'_{n-1} \leq 2$ y también queda una descomposición de la forma (1).

Sentada esta proposición, como cualquier número N es múltiplo de $5^0 = 1$, se podrá poner

$$N = k_1 5 + c_0 \quad (2)$$

siendo c_0 uno de los valores $0, \pm 1, \pm 2$. Análogamente,

$$k_1 5 = k_2 5^2 + c_1 5 \quad (3)$$

siendo $|c_1| \leq 2$; procediendo sucesivamente se tiene

$$k_2 5^2 = k_3 5^3 + c_2 5^2 \quad (4)$$

y sumando (2), (3) y (4) y simplificando resulta

$$N = c_0 + c_1 5 + c_2 5^2 + k_3 5^3$$

siendo $N \leq 312$, como dijimos al principio, debe ser $k_3 \leq 2$ y por tanto queda demostrada la proposición del enunciado.

Generalización. Sea m un número entero cualquiera y sea e la parte entera de $m/2$. Vamos a demostrar que cualquier número igual o menor que

$$e(1 + m + m^2 + \dots + m^n) = e \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1}$$

se puede expresar siempre en la forma

$$c_0 + c_1 m + c_2 m^2 + \dots + c_n m^n$$

siendo $|c_i| \leq e$ para todo valor de i . La demostración es la misma que antes, bastando probar que cualquier múltiplo $k_{n-1} m^{n-1}$ de m^{n-1} se puede expresar siempre en la forma

$$k_{n-1} m^{n-1} = k_n m^n + c_{n-1} m^{n-1} \quad (5)$$

siendo $|c_{n-1}| \leq e$. En efecto, dividiendo k_{n-1} por m queda

$$k_{n-1} = q_n m + r_{n-1}$$

donde $r_{n-1} \leq m - 1$ y por tanto

$$k_{n-1} m^{n-1} = q_n m^n + r_{n-1} m^{n-1}.$$

Si $r_{n-1} \leq e$, esta expresión es ya de la forma (5); si $r_{n-1} > e$, se puede poner $r_{n-1} = m - r'_{n-1}$, siendo $r'_{n-1} \leq e$, con lo cual resulta

$$k_{n-1} m^{n-1} = (q_n + 1) m^n - r'_{n-1} m^{n-1},$$

que es de la forma deseada (5).

Con esta observación, procediendo exactamente igual que en el caso particular del enunciado, se tiene demostrada la generalización dicha.

Obsérvese todavía que si m es *par*, al obtener el valor $r_{n-1} = e$, no hace falta pasar al complementario $m - r_{n-1}$ y por tanto el valor $-e$ puede excluirse de entre aquellos que pueden tomar los coeficientes c_i .

Ejemplo. Cualquier número entero ≤ 20685 se puede escribir en la forma

$$c_0 + 14 c_1 + 196 c_2 + 2744 c_3$$

donde los coeficientes c_i pueden tomar solamente los valores $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, + 7$.

Esta solución y generalización son debidas al Sr. CARLOS A. KRÜGER, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

N.º 101 — Escribir la condición que deben cumplir los coeficientes p, q, r de la ecuación

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

para que sus raíces sean lados de un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN. — Llamemos a, b, c las raíces de la ecuación dada. Se sabe que entre ellas existen las relaciones

$$a + b + c = -p, \quad ab + ac + bc = q, \quad abc = -r \quad (1)$$

de las cuales se deduce, elevando al cuadrado la primera y restando el duplo de la segunda

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q. \quad (2)$$

Para que a, b, c sean lados de un triángulo rectángulo es necesario y suficiente que se cumpla la relación

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3)$$

y por tanto, de (2) se deduce

$$a^2 = \frac{p^2 - 2q}{2}. \quad (4)$$

Por otra parte, de las relaciones primera y tercera de (1) se deduce

$$b + c = -(p + a), \quad bc = -\frac{r}{a}$$

de donde, elevando al cuadrado la primera de estas igualdades y restando el duplo de la segunda,

$$b^2 + c^2 = p^2 + a^2 + 2ap + 2\frac{r}{a}.$$

De esta ecuación y de la (3) se deduce

$$ap^2 = -2a^2p - 2r.$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo a^2 por su valor (4) resulta finalmente

$$p^4(p^2 - 2q) = 2(p^3 - 2pq + 2r)^2$$

que es la condición buscada.

Esta solución, salvo detalles de redacción, ha sido enviada por el Sr. MORSES GRILL, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

N.º 104 — Estudiar la curva

$$x^4 + y^4 = a^2xy$$

y hallar el área limitada por cada uno de los ciclos cerrados que la constituyen.

SOLUCIÓN. — Por comodidad podemos poner la ecuación de la curva en coordenadas polares ρ, ϑ , teniendo como eje polar el eje x . Se tiene

$$\rho^2 = \frac{a^2 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{\operatorname{sen}^4 \vartheta + \cos^4 \vartheta}. \quad (1)$$

Para que ρ sea real debe ser

$$\operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\vartheta \geq 0$$

o sea

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \pi \leq \vartheta \leq \frac{3}{2}\pi$$

lo cual nos dice que la curva está contenida en el primer y tercer cuadrantes, siendo, según (1), simétrica respecto el origen.

Además, para ϑ y $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, ρ toma el mismo valor; por tanto, la curva es también simétrica respecto la recta que forma con el eje polar el ángulo $\vartheta = \pi/4$.

El origen es un punto doble, con las tangentes $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi/2$, puesto que estos valores son los que anulan a ρ en (1).

El máximo valor de ρ se obtiene anulando la derivada del segundo miembro de (1), lo cual da la ecuación

$$2 \operatorname{sen}^2 \vartheta - 1 = 0$$

ρ sea, $\vartheta = \pi/4$. Para este valor se obtiene $\rho = a$, que será el máximo valor de ρ .

La curva se compone por tanto de dos ciclos cerrados, simétricos respecto el origen y respecto la recta $\vartheta = \pi/4$, tangentes en el origen a las rectas $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi/2$ y cada uno con un solo máximo de ρ sobre la recta $\vartheta = \pi/4$.

2. Para calcular el área de cada uno de los ciclos, recordando la expresión del área en coordenadas polares y la simetría de la curva respecto la recta $\vartheta = \pi/4$, se tiene

$$A = \int_0^{\pi/4} \rho^2 d\vartheta = a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{\operatorname{sen}^4 \vartheta + \cos^4 \vartheta} d\vartheta.$$

Haciendo el cambio de variable

$$\tan^2 \vartheta = t, \quad \cos^2 \vartheta = \frac{1}{1+t}, \quad d\vartheta = \frac{dt}{2\sqrt{t(1+t)}}$$

se tiene

$$A = a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\tan \vartheta}{\cos^2 \vartheta (1 + \tan^4 \vartheta)} d\vartheta = \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{8} a^2.$$

que nos da el valor del área buscada de cada uno de los dos ciclos que componen la curva.

Esta solución es debida al Sr. A. DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial anexa a la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

N.º 105 — En un plano se da un arco AB que sea convexo (o bien cóncavo) respecto de un punto O del plano y respecto de un par de rectas ortogonales que pasen por O . Demostrar, posiblemente con un razonamiento elemental, que el área del sector que proyecta desde el O el arco AB es igual a la semisuma de las áreas de los trapezoides que proyectan el arco sobre las dos rectas.

La proposición se extiende sin dificultad al caso de un arco cualquiera atribuyendo signos convenientes a las áreas eventualmente superpuestas por efecto de los cambios de dirección de la convexidad o a las áreas de los trapezoides en caso de que la convexidad se comporte en modo diferente respecto del punto O y de las rectas consideradas. Se propone expresar también tal complemento.

SOLUCIÓN. — Dado el arco AB y las dos rectas que pasan por el punto O (fig. 1) y son normales entre sí, llamamos S al área del sector AOB ; S_1 la del trapezoide $ABB'A'$ y S_2 a la del otro trapezoide $ABB''A''$. Observando la figura vemos que podemos escribir que:

$$S = \text{ar. } OAA' + S_1 - \text{ar. } OBB'$$

y

$$S = \text{ar. } OBB'' + S_2 - \text{ar. } OAA''.$$

Sumando y considerando que: $\text{ar. } OAA' = \text{ar. } OAA''$ y $\text{ar. } OBB' = \text{ar. } OBB''$, resulta:

$$2S = (S_1 + S_2)$$

o sea que:

$$S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2),$$

que es la primera parte del enunciado.

Segunda parte:

Vamos a extender al caso de un arco cuya concavidad respecto el punto O y las dos rectas está diferentemente orientada; sea el de la (fig. 2), llamando como antes:

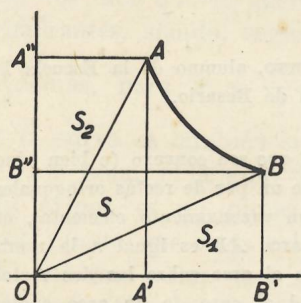


Fig. 1

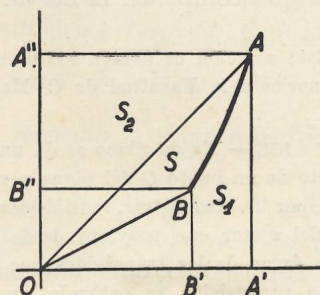


Fig. 2

$$\text{ar. } ABO = S, \quad \text{ar. } ABB'A' = S_1, \quad \text{ar. } ABB''A'' = S_2$$

y observando la figura vemos que:

$$S = OBB' - S_1 - OAA'$$

y

$$S = OAA'' + S_2 - OBB''$$

sumando resulta:

$$2S = S_2 - S_1$$

$$S = \frac{1}{2} (S_2 - S_1)$$

es decir que, si adoptamos el criterio de asignar signos a las áreas consideradas, y establecemos que los trapezoides tengan signo igual u opuesto al sector, según es la convexidad correspondiente orientada igual u opuestamente —y cambiando, pues, en el caso de la figura, el signo del área S_1 — podremos todavía aplicar la fórmula anterior.

Para generalizar aún más, consideremos una curya arbitraria, con cambios de convexidad, y de extremos A y B . Haremos la siguiente convención de signos:

Para las áreas S : Signo positivo cuando el radio vector barre las mismas girando en el sentido de las agujas del reloj. Signo negativo en el caso contrario.

Para las áreas S_1 : igual signo que el de las S cuando la concavidad de la curva se comporte en igual forma para el punto O y la recta correspondiente. Signo negativo en caso contrario.

Para las áreas S_2 : criterio idéntico al adoptado para S_1 .

Se sobreentiende que las áreas S , S_1 y S_2 tienen el mismo significado que les habíamos dado anteriormente.

Trataremos ahora de justificar la convención expuesta; consideremos la curva dada a la cual dividiremos en arcos tomando como puntos de división aquellos para los cuales se produce un cambio en el comportamiento de la convexidad; o sea (despreciando por sencillez el caso de puntos angulosos) los puntos donde la curva admite tangente paralela a una de las dos rectas o bien que pasa por el punto O .

Dividida pues la curva en arcos por medio de estos puntos, aplicaremos las fórmulas ya deducidas a cada uno de aquellos, respetando la convención de signos propuesta; obtenemos así:

$$S = \sum S = \frac{1}{2} (\sum S_1 + \sum S_2).$$

Observemos que la expresión $\sum S$ nos representa el área encerrada entre la curva y los radios vectores de los extremos de la misma; en efecto: a partir de A el extremo del radio vector recorre los puntos de la curva girando en sentido positivo (agujas de reloj) engendrando áreas que hemos convenido en llamar positivas. Al llegar al punto T_1 , el sentido de giro se invierte y el signo de las áreas barridas será negativo, restándose a las anteriormente engendradas; esto hasta el punto T_2 , para el cual se produce un nuevo cambio de signo. Podríamos seguir razonando así cualquiera fuese la forma de la curva y tendríamos demostrada la proposición.

Por un razonamiento completamente análogo llegaríamos a determinar el significado de las expresiones $\sum S_1$ y $\sum S_2$. Debemos hacer notar que para los trazos de curva que rebasan los radios vectores de los extremos o las rectas que proyectan a éstos, las áreas encerradas entre esos trozos y dichos vectores o rectas llevan signo contrario a las otras; resulta de eso

que al final las áreas consideradas podrán resultar compuestas de partes, a veces desconectadas entre sí y de signos diferentes.

Se puede dar al enunciado una generalización ulterior suponiendo que las dos rectas por el punto O no sean ortogonales sino que formen un ángulo cualquiera, con tal que los trapezoides se consideren con lados paralelos a las mismas. La demostración se puede conducir en forma idéntica; pero basta también notar que se pasa del caso de rectas ortogonales al de rectas oblicuas por una transformación afín, la cual, como se sabe, conserva la igualdad de las áreas.

Esta solución es debida al Sr. CARLOS A. KRÜGER alumno del 6º año de ingeniería civil.

Observación. — La proposición que se propuso demostrar con consideraciones elementales no difiere en sustancia de la conocida fórmula de Green (*) que permite calcular una área por medio de la integral de contorno

$$S = \frac{1}{2} \int (x dy - y dx).$$

En efecto, considerando el sector OBA , el contorno se compone de los dos segmentos OB , AO y del arco BA . Sobre los segmentos se tiene respectivamente

$$y = cx, \quad c = \alpha_1, \alpha_2$$

donde α_1, α_2 son los dos coeficientes de dirección; luego

$$x dy = y dx = c x dx,$$

$$x dy - y dx = 0.$$

Quedan luego tan sólo las integrales

$$\int_{BA} x dy, \quad - \int_{BA} y dx$$

que representan las áreas de los trapezoides; el signo — delante la segunda integral corresponde al hecho que, cuando la figura tiene la disposición más simple de fig. 1, el arco BA resulta recorrido en el sentido de las x decrecientes y de las y crecientes.

(*) Ver, por ejemplo B. LEVI, *Analisi Matematica algebrica ed infinitesimale*, Bologna, 1937, pág. 439; P. APPEL, *Elements d'Analyse Mathématique*, Paris, 1921, págs. 89, 545.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

117. - Hallar un polinomio de tercer grado que para los valores 1 y 2 de la variable toma el valor 1, mientras su derivada toma el valor 0.

118. - Calcular el límite para $x \rightarrow 0$ de la expresión

$$\frac{3(x^2+1)^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 5x^3 - 3 \operatorname{sen} x}{x^5}.$$

119. - Demostrar que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^p n^m}{(p+1)^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

120. - Un segmento de longitud constante a se desplaza sobre una recta fija tangente a una circunferencia de radio r ; en los extremos del segmento hay dos rectas que se mantienen constantemente tangentes a la misma circunferencia; se desea el lugar geométrico del punto de intersección de estas tangentes y la velocidad de este punto cuando el segmento a se mueve con velocidad constante. Discutir el resultado indicando, para los distintos valores de la razón a/r los detalles de forma y posición de la curva.

121. - En los dos extremos de un hilo sin peso de longitud l móvil alrededor de un punto P (polea de la cual se desprecia la masa, momento de inercia, etc.) están colgados dos pesos iguales; el uno A funciona únicamente como contrapeso y por lo tanto se considera como un punto material de masa $M + m$. El otro B está constituido por una masa M que por medio de un brazo b , sin peso, lleva otra masa m que puede por este medio ponerse en rotación sobre una circunferencia de centro B y radio r .

Se supone que B puede moverse únicamente sobre la vertical. Si el brazo b no está en movimiento el sistema está evidentemente en equilibrio. Se pregunta qué ocurre después que el brazo se haya puesto en rotación con velocidad angular ω , cuál es entonces la trayectoria real del punto m y qué ocurre si se para instantáneamente el movimiento del brazo.

BIBLIOGRAFIA

GONZÁLEZ, MARIO O. *Nuevas Tablas de Logaritmos y de Funciones naturales*. Ed. Selecta. La Habana, 1945.

Según manifiesta el autor en el "Prólogo", se trata de ofrecer unas tablas económicas, bien impresas y sobre todo presentar unas tablas de log. con 5 decimales, destacándose las ventajas que de ello se deriva para la enseñanza así como de lo suficiente que resultan para las aplicaciones usuales en ingeniería, agrimensura, física, etc.

El material ofrecido es el siguiente:

Uso de las Tablas. — Se dan indicaciones para resolver los distintos problemas que atañen a cada una de las tablas de la obra.

TABLA I: *Logaritmos de los números, desde 1.000 a 10.000.* — Las tablillas de partes proporcionales se calcularon hasta las décimas.

TABLA II: *Logaritmos de las Funciones Trigonométricas.* Senos, Cosenos, Tangentes y Cotangentes de minuto en minuto desde 0° hasta 90°. Las tablillas de P. Prop. están calculadas para cada décima de 1', pues según el autor 1' es la precisión general de goniómetros de física e ingeniería, pudiéndose llegar a estimar la décima del minuto. En nuestro país, en lo concerniente a instrumentos topográficos, por el momento es más frecuente hallar apreciaciones de 10'', 20'' o 30'', por lo tanto el uso de tales tablillas exigiría una transformación previa, como el autor lo hace notar.

Se han agregado tablillas de P. Prop. para algunas de las dif. tabulares de los tres primeros grados del cuadrante; ésto, a nuestro entender, puede ser inconveniente, puesto que ello puede tentar a efectuar una interpolación lineal; generalmente en esa parte de las tablas se suprimen dichas tablillas.

TABLA III: *Logaritmos de las Funciones* $\frac{\text{sen } x''}{x''}$ y $\frac{\text{tan } x''}{x''}$. Se dan, como de costumbre, para valores del ángulo x expresado en segundos, a intervalo de 60 segundos (o sea, de minuto en minuto) desde 0° a 3°.

TABLA IV: *Funciones Trigonométricas naturales.* Senos, Cosenos, Tangentes Cotangentes de minuto en minuto desde 0° hasta 90°. En general los valores (naturales) de las funciones trigonométricas están dados con 5 decimales, aunque en los primeros grados se hallan valores con 6, 7 y hasta 8 cifras (enteras y decimales). En cada pág. figuran las tablas correspondientes a dos grados, logrando así economizar espacio, si bien ello ha obligado a prescindir de las columnas de dif. tabulares y tablillas de P. Prop.

TABLA V: *Cuadrados, Cubos, Raíces cuadradas y Raíces cúbicas de los números enteros.* — Se dan los valores enunciados para n (natural) desde 1

hasta 100, además figuran para los mismos valores de n , los de $\sqrt[3]{10n}$, $\sqrt[4]{10n}$ y $\sqrt[5]{100n}$. En “Uso de las Taplas” se dan indicaciones para aprovechar estos valores.

A pesar de las razones de economía indicadas por el autor, que aconsejan no recargar con tablas complementarias, estimaríamos conveniente que fueran resumidas las fórmulas de resolución de triángulos planos y esféricos, de log. de algunos números usuales, de transformación de diversos sistemas de medidas de ángulos, reducción al primer cuadrante, etc., pues además de su utilidad indiscutible en la enseñanza ahorran por lo menos el tiempo de tener que buscar dichos elementos en otros libros al no tenerlos a mano en el propio útil de trabajo.

Nos permitimos, finalmente, hacer una observación sobre el título de la obra, creemos que en lugar de decir “...y de funciones naturales” debería figurar: ...“y de valores naturales de las funciones trigonométricas”.

E. O. FERRARI

BALANZAT, MANUEL, *Introducción a la Matemática Moderna*, Editorial Atlántida, Buenos Aires 1946.

El objeto de esta interesante obra es, según el Autor, “dar la noción clara y precisa de algunos de los principales conceptos y métodos que constituyen la matemática moderna sin entrar en los detalles técnicos para su manejo, y además hacer comprender el papel de los mismos en el pensamiento científico y en la vida de la humanidad”.

Con este propósito se exponen sucesivamente los orígenes y los conceptos fundamentales en que se basan las principales ramas de la matemática actual, mencionando también los problemas más sobresalientes que con ellas se ha logrado resolver; problemas cuyo enunciado y alcance se especifica en cada caso de manera precisa y se aclara con ejemplos, si bien no se intenta, lo que no sería posible dado la naturaleza elemental de la obra, explicar el mecanismo de resolución.

Por tratarse de un libro dedicado a no especialistas (en ningún caso —dice el autor— hemos supuesto en el lector mayores conocimientos matemáticos que los que se exigen en el país a los alumnos del ciclo secundario), al decir matemática moderna no se trata de las últimas ramificaciones de la matemática actual, sino de las grandes corrientes de donde ellas partieron y que constituyen sus fuentes vitales (teoría de conjuntos, geometrías no euclideas, geometría analítica, cálculo infinitesimal), todo expuesto elementalmente, con lenguaje sencillo, pero riguroso y claro.

Distribuidas en el texto la obra contiene doce láminas con los retratos de los principales grandes matemáticos.

L. A. SANTALÓ

INTERMÉDIAIRE DES RECHERCHES MATHÉMATIQUES.

Para reanudar la tradición representada hace muchos años por las revistas *Intermédiaire des mathématiciens* y *Sphinx-Œdipe* ha empezado a publicarse

en Francia desde el año pasado el *Intermédiaire des recherches mathématiques*. Provisionalmente la publicación tiene periodicidad trimestral; por muchos respectos conserva las costumbres del primer *Intermédiaire* como la numeración progresiva de las preguntas, la clasificación simbólica del *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* (a la cual con el n° 0111 propone agregar cierto número de títulos) y desde luego la publicación de respuestas. Posiblemente aun tiene intención de extender mayormente su radio de acción como resulta del siguiente elenco de los fines de la Revista, que traducimos literalmente:

“Ayudar a las investigaciones matemáticas desinteresadas; proporcionar indicaciones sobre cualquier cuestión matemática, independientemente de su nivel y de su posible especialización; facilitar contactos entre investigadores aislados y sugerir los especialistas; señalar los problemas matemáticos no resueltos y los argumentos de investigación, aun cuando ellos deriven de otras ramas científicas; tener al día de la actualidad matemática; colaborar en las realizaciones matemáticas de interés colectivo; contribuir al intercambio internacional”.

Mayores detalles sobre la historia de los fines y de los esfuerzos que han costado, antes el *Intermédiaire des Mathématiciens* y *Sphinx Œdipe*, y que ahora vienen heredados por la nueva revista pueden leerse en el n° 0443, pág. 24 - 25 del tomo 2 - enero 1946.

La correspondencia debe dirigirse a: *Intermédiaire des recherches mathématiques* - 55, rue de Varenne, Paris (7^e).

Auguramos a la útil iniciativa de prosperar con el mayor éxito para el progreso de las matemáticas y de sus aplicaciones.

LA RED.