

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO CUARTO - FASC. 3



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1944

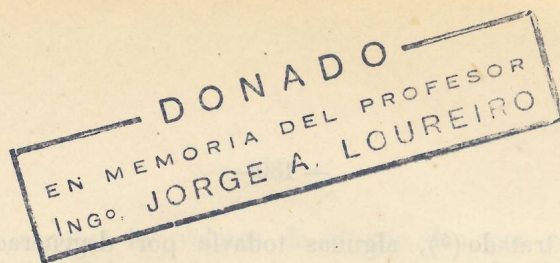
AUTORIDADES DE LA FACULTAD

Delegado Interventor
Arquitecto ERMETE DE LORENZI

Secretario
Ingeniero LUIS AYMÍ

INDICE

	Pág.
El principio de correspondencia de Chasles-Cremona y el orden de la reglada de las trisecantes de una curva (B. LEVI)	129
Resultado del concurso entre solucionistas de problemas propuestos en el año tercero (1943)	136
Algunas observaciones elementales sobre la realidad de las raíces de una ecuación algebraica (A. TERRACINI)	137
Errata (N. d. R.)	144
Consideraciones sobre una proposición de W. H. Young (MISCHA COTLAR - BEPPPO LEVI)	145
Los polinomios de aproximación de $\sin x$ y $\cos x$ (B. LEVI)	156
Solución a la cuestión Nº 11 (L. A. SANTALÓ)	164
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	170
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	183
Cuestiones	184



EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA DE CHASLES-CREMONA Y EL ORDEN DE LA REGLADA DE LAS TRISE- CANTES DE UNA CURVA

Damos a continuación una demostración de la fórmula que expresa el orden de la superficie reglada de las trisecantes de una curva algebraica alabeada, que se nos presentó en ocasión de una clase y que es extremadamente simple por apoyarse únicamente en el principio de correspondencia sobre la recta⁽¹⁾ (del cual, por claridad, vamos también a resumir la demostración, con algunos detalles, en el primer párrafo); tan simple, que todo debería hacernos pensar que de alguna manera no sea nueva, si no fuera que ninguna traza pudimos encontrar en la bibliografía⁽²⁾ que en sus líneas fundamentales vamos a resumir.

La fórmula es debida a Cayley⁽³⁾ que la obtuvo con método enumerativo fundado sobre la degeneración de la curva y la resolución de una ecuación funcional. Zeuthen en su tratado de geometría enumerativa⁽⁴⁾ reproduce esta demostración con algunas reservas acerca de las hipótesis que ella implica. Otras muchas demostraciones fueron dadas en los años siguientes, las principales reproducidas también, por lo menos en resumen,

(¹) Dicho de Chasles, aunque enunciado primeramente y defendido por Cremona.

(²) Véase al respecto la larga nota bibliográfica en el artículo III C de la *Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften* por Rohn y Berzolari (Vol. III, 2, pág. 1282).

(³) *On skew Surfaces otherwise Scrolls* - London Philosophical Transactions CLIII (1863).

(⁴) H. G. ZEUTHEN, *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie* - Leipzig - Teubner (1914). La fórmula se encuentra también reproducida por Zeuthen en una Nota *Sur les singularités des courbes gauches* en los C. R. de la Academia de Francia (vol. LXVII, 1868), con muchas otras y con las mismas observaciones aludidas en el texto.

en dicho tratado⁽⁵⁾, algunas todavía por degeneración, otras por aplicación del principio de conservación del número por pasaje al límite y finalmente por aplicación de la fórmula de correspondencia de Cayley y Brill⁽⁶⁾, métodos éstos que implican una preparación teórica no despreciable. El lector puede encontrar una exposición de estas demostraciones en el tratado de Geometría algebraica de Enriques y Chisini⁽⁷⁾.

1. El principio de correspondencia sobre la recta dice que *si sobre una recta está definida una correspondencia algebraica (m, n)* (es decir, tal que la correspondencia directa hace corresponder a cada punto de la recta n puntos de la misma, mientras la correspondencia inversa a cada punto de la recta le hace corresponder m puntos) *el número de los puntos unidos* (cada uno de los cuales tiene sí mismo como correspondiente) *es $m + n$.*

Recordamos la demostración, para la claridad: los puntos de una recta se representan unívocamente por los valores de una abscisa x ; una correspondencia algebraica entre puntos de la recta es una definida por una sucesión de operaciones representables por un sistema de ecuaciones algebraicas entre la abscisa x' del punto de partida, ciertas variables $y_1, y_2, \dots, y_k$ y finalmente la abscisa del punto x'' que, por definición, es el correspondiente de x' ; puesto que, por hipótesis, este sistema de ecuaciones para cada valor de x' determina un cierto número finito de valores correspondientes de x'' , la eliminación algebraica de las variables $y_1, y_2, \dots, y_k$ entre esas ecuaciones lleva a determinar dichos valores de x'' como las raíces de una cierta ecuación de grado n cuyos coeficientes son polinomios en x' . El primer miembro de esta ecuación es pues un polinomio $f(x', x'')$ en las dos variables

⁽⁵⁾ Ver pág. 102 y 256. Otras no pudimos examinar en este momento por falta de medios bibliográficos; pero las indicaciones encontradas nos permiten suponer que no puedan tener algo común con el camino adoptado aquí.

⁽⁶⁾ Esta fórmula difiere de la que se va a aplicar aquí por considerar una correspondencia sobre una curva algebraica de género cualquiera, cuyos puntos por tanto no se pueden más representar racionalmente por los valores de una variable numérica y necesita la introducción de la noción suplementaria de la valencia.

⁽⁷⁾ F. ENRIQUES E O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria generale delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Bologna - Zanichelli - Vols. I a IV - 1915 - 1934). Ver Vol. II pág. 289 y Vol. III p. 471.

x', x'' . Para conocer los valores de x' que dan por correspondiente un dado x'' basta determinar los valores de x' que, por dado x'' hacen $f(x', x'') = 0$; si estos valores son m , quiere decir que el polinomio $f(x', x'')$ que ya se había supuesto de grado n en x'' , es de grado m en x' . Debe ahora hacerse la observación que entre los puntos de la recta deben siempre contarse los de abscisa ∞ ; y, para evitar las dificultades de cálculo en el ∞ , conviene introducir coordenadas homogéneas, considerando x' y x'' como razones cada una entre dos variables que toman únicamente valores finitos⁽⁸⁾. Pues la ecuación no debe cambiar cuando las dos nuevas variables que se sustituyen a cada una de las x', x'' se multiplican por un factor arbitrario, la nueva ecuación en 4 variables que se sustituye a $f(x', x'') = 0$ debe ser homogénea separadamente respecto las dos variables que representan x' y respecto las dos variables que representan x'' ; vale decir que cada término tendrá el grado total m respecto de las primeras variables y n respecto de las segundas.

Sentado esto, para buscar los puntos unidos de la correspondencia, habrá que buscar los pares $x' = x''$ que realizan la ecuación, es decir, hay que buscar las soluciones de la ecuación que se obtiene poniendo las dos variables homogéneas cuya razón vale x' iguales respectivamente a las dos cuya razón es x'' ; se obtendrá de este modo que cada término de la nueva ecuación será de grado total $m + n$ (en dos variables homogéneas). Cuando se cuenten las raíces con la conveniente multiplicidad, el número de esas raíces será luego $m + n$.

La determinación de esta multiplicidad es el problema esencial que debe tratarse en cada caso para la recta aplicación del principio.

Una regla para esa determinación que ha sido dada por Zeuthen⁽⁹⁾ consiste en observar que si x', x'' se consideran como dos coordenadas cartesianas de un plano, la ecuación $f(x', x'') = 0$ representa una curva de orden $m + n$ ⁽¹⁰⁾; los puntos $x' = x''$ son los

⁽⁸⁾ Ver la nota ⁽¹⁰⁾.

⁽⁹⁾ Ver l. c. p. 105, o del mismo ZEUTHEN: *Note sur le principe de correspondence*. Bulletin de la Société math. de France 5. (1873). ENRIQUES - CHISINI, l. c. Vol. I p. 159.

⁽¹⁰⁾ Conviene notar, en comparación con lo que precede, que, puesto, como arriba expresado, $x' = \xi : \xi_0$, $x'' = \eta : \eta_0$, y reducida luego la ecuación de la correspondencia $f(x', x'') = 0$ en la forma homogénea $F(\xi, \xi_0; \eta, \eta_0) = 0$,

de intersección de esa curva con la recta $x' - x'' = 0$; a cada uno convendrá atribuir la misma multiplicidad que le corresponde en dicha intersección. Zeuthen expresa entonces esta afirmación en la forma de una determinación de órdenes de infinitésimo, lo que, rígidamente aceptado, impondría cálculos algebraicos complicados que son precisamente los que el principio de correspondencia quiere evitar. Equivalente, pero simple y más clara — y más conforme a la práctica de las aplicaciones — puede ser la regla siguiente: sea x_0 uno de los puntos unidos del cual se busca la multiplicidad; si se considera un punto x' próximo a x_0 , le corresponden n puntos x'' distintos de x' y entre sí; suponiendo que x' se acerque a x_0 con continuidad, estos puntos x'' se desplazan, tendiendo algunos de ellos al mismo punto x_0 ; el número de esos puntos que tienden a x_0 es la multiplicidad buscada. En efecto, acudiendo nuevamente a la anterior repre-

la interpretación como curva plana no sería inmediatamente posible. Es necesario, para eso, poner entre las cuatro variables homogéneas una relación, que en nuestro caso será claramente la identificación de ξ_0 y η_0 ($\xi_0 = \eta_0 = \zeta$). En efecto esto no es más que una parte de la identificación $x' = x''$, que por tanto debe suponerse hecha previamente, antes de pasar a la determinación de los puntos unidos. Para que esto sea posible sin alterar el razonamiento precedente es necesario que esta identificación previa no modifique el grado de la ecuación; se notará, para ese fin, que siempre se puede efectuar sobre las variables $\xi, \xi_0; \eta, \eta_0$ una misma sustitución homográfica

$$\begin{aligned}\xi &= \lambda \xi^* + \mu \xi_0^* & \xi_0 &= \nu \xi^* + \rho \xi_0^* \\ \eta &= \lambda \eta^* + \mu \eta_0^* & \eta_0 &= \nu \eta^* + \rho \eta_0^*\end{aligned}$$

tal que la ecuación transformada $F^*(\xi^*, \xi_0^*; \eta^*, \eta_0^*) = 0$ contenga un término independiente de ξ_0^* y η_0^* ; se pondrá entonces $\xi_0^* = \eta_0^* = \zeta^*$ sin que por eso aparezca una solución de la ecuación independiente de la ulterior posición $\xi^* = \eta^*$. Se obtiene pues una ecuación $\Phi(\xi^*, \eta^*, \zeta^*) = 0$ de una curva plana de orden $m + n$ de la cual tendrán que buscarse las intersecciones con la recta $\xi^* - \eta^* = 0$.

Brevemente la operación indicada equivale a suponer hecha sobre la abscisa x de la recta sostén de la correspondencia una transformación homográfica por la cual todos los puntos unidos de la correspondencia se han transportado al finito. Si $f(x'x'') = 0$ representa la correspondencia después de esta eventual transformación, valen sin mayores observaciones, las consideraciones del texto. Debe notarse todavía que, en casos particulares, no puede excluirse que la supuesta eventual transformación modifique en alguna parte el significado de la correspondencia y de sus puntos unidos; la eliminación de tal alteración se hace por medio de la discusión de las coincidencias de la cual en los números siguientes hay ejemplos.

sentación cartesiana, la multiplicidad de intersección de la recta $x' - x'' = 0$ con la curva $f(x', x'') = 0$ en un punto (x_0, x_0) es igual al número de los puntos de intersección de la curva con una recta $x' - x'' = a$, que, para a suficientemente pequeño, tienden a (x_0, x_0) . Siempre en la hipótesis que a sea pequeño estos puntos son simples; notemos además que por tratarse de correspondencia algebraica, cuando x' tiende a cierto valor $\bar{x}'$, cada uno de los puntos correspondientes, sea x'' , tiende a un valor determinado $\bar{x}''$ y, tan pronto como x' es bastante próximo a $\bar{x}'$, las diferencias $x' - x''$, $\bar{x}'' - x''$ tienden monótonamente a los límites $\bar{x}' - \bar{x}''$ y 0. Se sigue que, si a es bastante pequeño, al variar x' tendiendo a x_0 , cada uno de los puntos x'' que simultáneamente tienden a x_0 , una y una sola vez (y para valores diferentes de x') realizará la condición $x' - x'' = a$, dando lugar, en la representación cartesiana, a un punto de intersección de $f(x', x'') = 0$ con $x' - x'' = a$.

2. Supongamos ahora dada una curva alabeada C , de la cual indicaremos con m el orden y con d el número de los puntos dobles aparentes, es decir de las cuerdas que pasan por un punto arbitrario del espacio; determinar el orden de la reglada de las trisecantes equivale a determinar el número de las trisecantes apoyadas a una recta arbitraria r .

Sea P un punto arbitrario de r ; imaginemos trazadas las d cuerdas que pasan por P ; una cualquiera de ellas encuentra la curva C en dos puntos $A_1 A_2$; desde cada uno de estos puntos proyectemos la curva; obtenemos cada vez un cono de orden $m - 1$ que cortará la recta r en $m - 1$ puntos; uno de ellos es el mismo P ; los demás $m - 2$ los llamaremos Q . De esta manera queda establecida sobre la recta r una correspondencia entre los puntos, considerados como puntos P y los considerados como puntos Q , en la cual a cada P corresponden $2d(m - 2)$ puntos Q . La correspondencia entre P y Q puede expresarse brevemente diciendo que para P y Q pasan dos cuerdas que encuentran C en un mismo punto. Se ve de esta manera que esa correspondencia es simétrica y por lo tanto a cada punto Q corresponden $2d(m - 2)$ puntos P ; la correspondencia es $(2d(m - 2), 2d(m - 2))$ y tiene $4d(m - 2)$ puntos unidos.

Vamos a examinar el significado geométrico y la multiplicidad de estos puntos unidos. Para que un punto Q coincida

con el P del cual se ha partido es necesario que entre los puntos que hemos llamado A exista uno tal que el cono que de él proyecta la curva C corte en P dos veces la recta r ; esto puede ocurrir, o porque la recta AP es doble para el cono, es decir hay sobre la curva dos puntos A', A'' tales que las rectas que los unen con A coinciden con AP ; o bien porque la recta r es tangente al cono en el punto P .

En el primer caso la recta AP es una trisecante, encontrando la curva en A, A', A'' . En este caso la recta AP cuenta como 3 entre las d cuerdas de C que pasan por P (es decir AA', AA'' y $A'A''$; de otra manera se obtiene este 3 observando que a cada cuerda por P corresponde un punto doble en la curva proyección de C desde P ; si la cuerda se apoya a C en tres puntos este punto resulta triple y se sabe que un punto triple equivale a tres dobles). Por otra parte la recta AP es doble en cada uno de los conos que proyectan la curva de cada uno de los puntos A, A', A'' . Debe pues considerarse en este caso el punto P como una coincidencia sextuple. Si las trisecantes apoyadas a r son t , sus puntos de apoyo cuentan por $6t$ en el número $4d(m-2)$ de los puntos unidos.

En el segundo caso el plano Ar es tangente al cono que desde A proyecta C ; por tanto es tangente a C en el segundo punto de intersección de AP con la curva y la coincidencia es generalmente simple. Pero cada plano por r tangente a C en un punto B corta C en otros $m-2$ puntos y cada uno de éstos, tomado como punto A determina con B una recta AB que encuentra r en un punto P que presenta la coincidencia aludida. El número de estos puntos se obtiene luego multiplicando por $m-2$ el número de planos tangentes a C por r ; este número es el número de los planos tangentes por r al cono que proyecta C de un punto cualquiera P de r ; este cono tiene orden m y d generatrices dobles y el número de los planos tangentes es, por las fórmulas de Plücker $m(m-1)-2d$; se tiene luego la ecuación

$$6t + m(m-1)(m-2) - 2d(m-2) = 4d(m-2)$$

de donde

$$t = d(m-2) - \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

que es la fórmula buscada.

3. El método se aplica evidentemente para otros casos: supongamos por ej. que se quiera el orden de la reglada de las cuerdas de una curva C que se apoyan a otra curva C' ; sean m y d el orden y el número de los puntos dobles aparentes de C y sea n el orden de C' . Se trata de determinar el número de las cuerdas de C que encuentran C' y una recta r fijada arbitrariamente. Sobre r consideraremos la correspondencia siguiente:

Por un punto P cualquiera de r pasan mn rectas apoyadas a C y C' ; sea A , para una de ellas, el punto de apoyo en C ; la misma C es proyectada de A según un cono de orden $m-1$ que corta r en $m-1$ puntos que llamaremos correspondientes de P . De esta manera a cada punto P de r corresponden $mn(m-1)$ puntos Q . Pero ahora la correspondencia deja de ser simétrica; para determinar los puntos P que corresponden a un determinado Q observaremos que para un punto Q arbitrario pasan d cuerdas de C ; si A es uno de los puntos de apoyo de estas cuerdas, proyectando C' de A se obtiene un cono de orden n que corta r en n puntos P ; por lo tanto a cada punto Q corresponden $2dn$ puntos P . La correspondencia es $(2dn, m(m-1)n)$ y tiene luego $(2d + m(m-1))n$ puntos unidos. Evidentemente son puntos unidos los puntos donde pasa una cuerda de C que corta C' , y en general no hay otros; pero cada uno de estos puntos debe ser contado doble porque la cuerda que pasa por él cuenta por 2 en el número de las generatrices comunes a los conos que de ese punto proyectan C y C' . Llamando u al número buscado se tiene pues,

$$2u = (2d + m(m-1))n, \quad u = \left(d + \frac{m(m-1)}{2}\right)n.$$

Pero, supongamos que las curvas C, C' tengan algún punto común y sea i el número de estos puntos; en este caso, al contar el número de las rectas para un punto P , apoyadas en puntos distintos a C, C' , habrá que restar i al anterior número mn ; el número de los puntos unidos se reduce a

$$(2d + m(m-1))n - i(m-1).$$

Además para cada uno de los puntos comunes a C, C' pasan $m-1$ cuerdas de C que encuentran a r . Si se toma uno de estos

puntos de encuentro como punto P , la cuerda de C por ese P corta también C en un punto que no pertenece a C' y por esta razón debe contarse en el número de las intersecciones de los conos que desde P proyectan C, C' , dando de esta manera lugar a un punto Q coincidente con P . Se generan de esta manera $i(m-1)$ puntos unidos de la correspondencia en más de los $2a$ que corresponden a las cuerdas de C apoyadas a C' en puntos distintos. En este caso se tiene pues

$$2u + i(m-1) = (2d - m(m-1))n - i(m-1);$$

luego

$$u = \left(d + \frac{m(m-1)}{2} \right) n - i(m-1).$$

B. Levi

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

RESULTADO DEL CONCURSO ENTRE SOLUCIONISTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL AÑO TERCERO (1943)

En aplicación de lo dispuesto en el Art. 4 de la ordenanza de institución del Boletín del Instituto de Matemáticas "Mathematicae Notae" (Ver Año I, pág. 4), el Director del Instituto ha tomado en consideración las soluciones enviadas hasta el 1º de julio de 1944, haciendo al señor Delegado Interventor de la Facultad las propuestas correspondientes, que fueron aceptadas por resolución del Exp. 790-I-1944, con fecha 5 de septiembre de 1944, en el sentido de: 1º Adjudicar al estudiante de la Facultad, señor GUIDO O. G. LISERRE, el premio correspondiente al año 1943; 2º Declarar desierto el concurso entre solucionistas no pertenecientes a la Facultad; 3º Encargar al Director del Instituto de Matemática la determinación de uno o más libros de argumento matemático o físico para obsequiar al señor LISERRE en calidad de premio.

ALGUNAS OBSERVACIONES ELEMENTALES SOBRE LA REALIDAD DE LAS RAICES DE UNA ECUACION ALGEBRAICA

1. La cuestión n. 9 se refiere a la condición necesaria indicada por Faá di Bruno para que las raíces de la ecuación algebraica (de grado $n \geq 2$) de coeficientes reales:

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

sean todas reales. Dicha condición que, como está indicado en el enunciado de la cuestión n. 9, expresa que la media aritmética de los cuadrados de las raíces de (1), supuestas reales, es $\geq$ de la media geométrica, es

$$a_1^2 - 2a_2 \geq n \sqrt[n]{a_n^2}. \quad (FB)$$

Huelga observar que la (FB) es no sólo necesaria, sino también suficiente para la realidad de todas las raíces únicamente para $n=2$, mientras que no lo es para ningún valor de $n > 2$: en efecto para $n=3$ la ecuación

$$(x^2 + 1)(x + \lambda) = 0,$$

donde λ es una constante bastante grande en valor absoluto para que sea $\lambda^2 - 2 \geq 3 \sqrt[3]{\lambda^2}$, cumple con (FB) y tiene dos raíces imaginarias; para $n > 3$, la ecuación lograda de la anterior al multiplicar por x^{n-3} brinda un ejemplo análogo.

Por otra parte, la condición (FB) estriba en un principio tan sencillo que vale la pena preguntarse si, agregando alguna otra condición complementaria en el mismo orden de ideas, la (FB) puede transformarse en una condición *suficiente* para los primeros valores de n sucesivos a 2, p. e. para $n=3$, $n=4$.

La idea que desarrollo a continuación es la siguiente. Transformemos (1) con las transformaciones de cada uno de los grupos continuos siguientes:

$$x = \alpha X \quad (\alpha \neq 0) \quad (\text{I})$$

(grupo lineal entero homogéneo *real*);

$$x = \alpha X + \beta \quad (\alpha \neq 0) \quad (\text{II})$$

(grupo lineal entero *real*);

$$x = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \quad (\text{III})$$

(grupo lineal fraccionario *real*), reduciendo cada vez el coeficiente de x^n a la unidad mediante multiplicación por un factor conveniente (como lo sobreentenderemos a continuación). La condición (FB) es invariante para el grupo (I), pero no para los grupos (II), (III). Por otra parte, si las raíces de (1) son todas reales, lo mismo tiene que ocurrir para las ecuaciones transformadas de (1) no sólo mediante (I), sino también mediante (II) o (III). Por lo tanto, además de la condición necesaria (FB) cabe considerar las dos condiciones necesarias ulteriores:

condición (FB₁): rige (FB) para todas las transformadas de (1) mediante el grupo (II),

condición (FB₂): rige (FB) para todas las transformadas de (1) mediante el grupo (III).

Pues bien demostraré:

A) para $n=3$, la condición (FB₁) es no sólo necesaria, sino también suficiente para la realidad de todas las raíces;

B) para $n=4$, (FB₁) deja de ser suficiente y más precisamente, si rige (FB₁), la ecuación dada puede tener las 4 raíces reales, o bien 2 reales y 2 imaginarias conjugadas⁽¹⁾.

⁽¹⁾ En cambio, (FB) no permite excluir la posibilidad de que las 4 raíces sean todas imaginarias: p.e. $a \pm i\varepsilon$, $b \pm i\eta$ (con a, b, ε, η reales) son raíces de una ecuación que cumple con (FB) si $a^2 + b^2 - \varepsilon^2 - \eta^2 \geq 2\sqrt{(a^2 + \varepsilon^2)(b^2 + \eta^2)}$, a la cual desigualdad se satisface p. e. con $a=10, b=\varepsilon=\eta=1$.

En cambio (FB_2) es necesaria y suficiente para la realidad de todas las raíces.

Por supuesto, el único objeto que de tal forma me propongo es el de puntualizar, para los primeros valores de n , el alcance de la condición indicada por Faà di Bruno, sin que los enunciados A) y B) tengan algún valor en las aplicaciones. Sin embargo, en algunos casos, la condición (FB_1) como está escrita en el n. 2, puede servir, en cuanto no se cumpla para valores particulares de x , para indicar la existencia de raíces imaginarias.

2. Debido a la invariancia de la (FB) para el grupo (I), la (FB_1) puede reemplazarse por la condición de que rija (FB) para todas las transformadas de (1) mediante el cambio de variable $x = X + k$, donde k indica una constante real arbitraria. Indicando con a'_1, a'_2 , etc. los coeficientes de la ecuación transformada, se tiene

$$a'_1 = nk + a_1; \quad a'_2 = \frac{n(n-1)}{2} k^2 + (n-1) a_1 k + a_2; \quad a'_n = f(k);$$

de modo pues que (escribiendo x en lugar de k) la condición (FB_1) toma la forma siguiente: para cada x real es

$$\sqrt[n]{[f(x)]^2} \leq x^2 + \frac{2}{n} a_1 x + \frac{a_1^2 - 2a_2}{n}. \quad (FB_1)$$

De paso cabe observar que el segundo miembro es no negativo y luego tiene discriminante no positivo, de modo pues que (FB_1) implica la condición

$$2na_2 \leq (n-1)a_1^2, \quad (2)$$

esto es una de las desigualdades brindadas por el teorema de Sturm-Borchardt (la cual en cambio no está implicada por la (FB) , como lo observó el prof. Beppo Levi)⁽²⁾.

Supongamos ahora $n=3$. Para comprobar la suficiencia de

⁽²⁾ Sobre la cuestión n. 9, en esta Revista, año IV, p. 47.

(FB_1) , es suficiente demostrar tal suficiencia para las ecuaciones del tipo

$$x^3 + px + q = 0, \quad (3)$$

(porque de la (1) puede pasarse a la (3) con una transformación del grupo (II), y (FB_1) por su propia definición es invariante con respecto a dicho grupo); donde, merced a la consecuencia (2) de (FB_1) , $p \leq 0$; de forma que escribiremos $p = -P$, con $P \geq 0$. Pues bien, la (FB_1) viene a ser, después de elevar al cubo los dos miembros:

$$4Px^4 - 2qx^3 + \frac{P^2}{3}x^2 + 2Pqx + \frac{8P^3}{27} - q^2 \geq 0$$

(para cada x real). Si en particular elegimos

$$x = -\sqrt{\frac{P}{12}},$$

la última desigualdad viene a ser:

$$38 \frac{P^3}{q^2} - 33\sqrt{3} \frac{P^{3/2}}{q} - 108 \geq 0.$$

Por consiguiente $-\frac{P^{3/2}}{q}$ es menor o igual con respecto a la raíz negativa de la ecuación de segundo grado en τ :

$$38 \tau^2 + 33\sqrt{3} \tau - 108 = 0,$$

es decir

$$\frac{P^{3/2}}{q} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

y luego para la (3) rige

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0,$$

y las raíces de (3) son todas reales. Queda así comprobado A).

3. Pasemos ahora a las ecuaciones de cuarto grado, estudiando en primer término el alcance de la condición (FB_1) . También ahora podemos suponer sin restricción haber reducido previamente dicha ecuación a la forma

$$f(x) \equiv x^4 - Px^2 + qx + r = 0 \quad (4)$$

con $P \geq 0$ (merced a (2)). Entonces la (FB_1) se escribe

$$|f(x)| \leq x^2 + \frac{P}{2},$$

es decir

$$-x^4 - Px^2 - \frac{P^2}{4} \leq x^4 - Px^2 + qx + r \leq x^4 + Px^2 + \frac{P^2}{4},$$

y equivale al conjunto de las desigualdades

$$2Px^2 - qx + \frac{P^2}{4} - r \geq 0, \quad (5)$$

$$2x^4 + qx + \frac{P^2}{4} + r \geq 0. \quad (6)$$

Si $P=0$, la (5) brinda $q=0$ y $r \leq 0$, y luego la (6) $r \geq 0$, de forma que $r=0$, y (4) tiene la raíz cuádruple real $x=0$. Podemos por lo tanto prescindir a continuación del caso $P=0$.

Si en cambio $P>0$, la (5) equivale a

$$q^2 \leq 2P(P^2 - 4r), \quad (7)$$

y la (6) expresa que la ecuación de 4º. grado

$$2x^4 + qx + \frac{P^2}{4} + r = 0 \quad (8)$$

tiene raíces todas imaginarias, o bien, como caso límite, puede tener alguna raíz real, pero con multiplicidad par.

Por lo tanto ⁽³⁾ el discriminante D de la (8) es ≥ 0 , es decir

$$q^4 \leq \frac{8}{27} (P^2 + 4r)^3. \quad (9)$$

Viceversa, si (9) rige con el signo $<$, la (8) tiene raíces todas imaginarias ⁽⁴⁾, y si con el signo $=$ la (8) tiene por lo menos una raíz múltiple. Si ésta es imaginaria, es doble, y es doble también su conjugada, y rige (6); si es real, y $q \neq 0$, es la única raíz real de $8x^3 + q = 0$, y luego tendrá multiplicidad 2 y no mayor, y las dos restantes raíces de (8) son imaginarias, mientras que si $q = 0$, la (8) se reduce a $x^4 = 0$, y sigue cumpliéndose (6). En resumen, para la ecuación (4), (FB_1) equivale, para $P \neq 0$, a las tres condiciones: $P > 0$, (7) y (9).

Supongamos ahora que la ecuación (4) satisfaga a la condición (FB_1) . Para que las raíces de (4) sean todas reales, si el discriminante Δ de (4) es positivo, es necesario y suficiente que sea $P > 0$ y $4r < P^2$ (compárese p.e. el final de la referencia ⁽³⁾). Pues bien, estas dos últimas condiciones están satisfechas (la última de ellas es consecuencia de (7), a menos que sea $q = 0$ y $4r = P^2$, en el cual caso está claro directamente que la (4) tiene dos raíces dobles reales): luego si (4) tiene raíces distintas, y $\Delta > 0$, las raíces necesariamente son todas reales: queda así excluida, para $\Delta \neq 0$, la posibilidad de 4 raíces imaginarias. A la misma conclusión se llega aun si $\Delta = 0$, considerando este caso como límite del anterior.

Por otra parte, es efectivamente posible que una ecuación

⁽³⁾ Recordamos (véase p. e. el *Repertorium der höheren Analysis* de E. PASCAL. Erste Hälfte, 2 Aufl. p. 287) que el discriminante:

$$D = 16a^4c - 4a^3b^2 - 128a^2c^2 + 144ab^2c + 256c^3 - 27b^4$$

de la ecuación

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

es positivo cuando las raíces de esta ecuación son todas reales (distintas) o todas imaginarias (distintas); y es negativo cuando son dos reales (distintas) y dos imaginarias (distintas). Si $D > 0$, las raíces son todas reales si y sólo si $a < 0$, $4c < b^2$.

⁽⁴⁾ No pueden ser todas reales, debido a la ausencia de los términos en x^3 , x^2 en la ecuación (8).

con dos raíces reales y dos imaginarias conjugadas cumpla con (FB_1) : p.e. la ecuación bicuadrada

$$x^4 - Px^2 + r = 0, \quad (10)$$

con $P > 0$ y $-P^2 \leq 4r < 0$.

Queda así comprobada la primera parte de B). La demostración de que (FB_1) es incompatible con la existencia de cuatro raíces imaginarias podría hacerse directamente: el camino más largo que hemos seguido tiene la ventaja de explicitar (FB_1) en la forma expuesta más arriba. P.e., de lo dicho se desprende que si la ecuación bicuadrada (10) cumple con (FB_1) y no tiene raíces todas reales, sino dos reales $\pm \alpha$ y dos imaginarias conjugadas $\pm i\beta$, $|\beta|$ queda limitado en función de $|\alpha|$ por la condición

$$|\beta| \leq \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} |\alpha|.$$

3. Vamos ahora a demostrar la última parte de B).

Observemos previamente que una ecuación de cuarto grado de coeficientes reales siempre puede reducirse a la forma bicuadrada mediante una substitución lineal fraccionaria (III) de coeficientes reales. En efecto, considerando sus cuatro raíces, reales o no, como coordenadas proyectivas de otros tantos puntos (reales o no) de una puntual, siempre es posible repartir dichos cuatro puntos en dos pares que resulten armónicos a un mismo par de puntos reales M, N : en efecto, si las cuatro raíces son reales, es suficiente repartir los cuatro puntos en dos pares que no se separen; mientras que, si existe por lo menos un par de raíces imaginarias conjugadas, un conocido teorema de geometría proyectiva enseña que dos involuciones (reales) sobre una misma puntual necesariamente tienen en común un par de puntos reales, si una por lo menos de ellas es elíptica. Si luego se efectúa una transformación lineal (III) que lleve los valores de la coordenada x correspondientes a los puntos M, N respectivamente a los valores $X=0$, $X=\infty$, es claro que la ecuación obtenida de la dada mediante dicha transformación es bicuadrada.

Dada por lo tanto una ecuación de cuarto grado que cumpla con la condición (FB_2) , esta misma condición y por consiguiente

la (FB_1) deberá resultar satisfecha también por la ecuación bicuadrada (10) obtenida de la forma que acabamos de indicar. Si $P=0$, ya se dijo al principio del n. 3, que las cuatro raíces son reales. Si $P>0$, la (7) expresa que $P^2-4r\geq 0$, y luego los valores de x^2 deducidos de la (10) son reales. Además, si $r=0$, ya está claro que las cuatro raíces de (10) son reales; si $r\neq 0$, la transformada de (10) en $1/x$ es otra ecuación de cuarto grado que por hipótesis cumple con (FB_1) , de modo pues que $P/r>0$, esto es $r>0$, y se concluye que las cuatro raíces de (10), y por consiguiente las de la ecuación de cuarto grado propuesta son todas reales.

Alejandro Terracini

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNIVERSIDAD NACIONAL — TUCUMAN

ERRATA

Señalamos dos errores de imprenta en el artículo “*Sobre la cuestión nº 9*” aparecido en el fasc. 1 de este mismo año en cuanto pueden dar motivo a confusión al comparar con el que antecede.

p. 41. — En el enunciado de la cuestión el signo $>$ debe cambiarse en $<$, conforme a lo que se había publicado al proponerla (Math. Notae. Año III, p. 122) y a la desigualdad (FB) del Prof. Terracini.

p. 45. — En la desigualdad (17) el signo $\leq$ debe leerse $<$.

N. de la R.

CONSIDERACIONES SOBRE UNA PROPOSICION DE W. H. YOUNG

Damos cuenta en las pocas páginas que siguen de algunas consideraciones críticas que han resultado de una breve correspondencia epistolar. Se trataba de la observación siguiente:

En el tratado de E. W. Hobson «*The Theory of Functions of a real Variable*»⁽¹⁾ se encuentra, atribuido a W. H. Young el siguiente enunciado: Si $G_1, G_2, \dots, G_n$ es una sucesión de conjuntos de puntos, cada uno de los cuales está contenido en un mismo conjunto cerrado de medida l , y si la medida interior de cada uno de los conjuntos $G_1, G_2, \dots, G_n$ es mayor que un cierto número C , entonces existe un conjunto de puntos, de medida interior $> C$ y de la potencia del continuo tal que cada uno de sus puntos pertenece a infinitos de los conjuntos dados. Este enunciado no reproduce exactamente el originario de Young⁽²⁾ que es el siguiente: Dada una sucesión de conjuntos $G_1, G_2, \dots$, contenidos en un conjunto cerrado de medida L , tales que el límite superior de las medidas de los componentes

⁽¹⁾ Vol. I, 3ª edic., 1927, nº 136, p. 183.

⁽²⁾ W. H. YOUNG, *Open sets and the theory of content*. Proceedings of the London Mathematical Society (2), II (1905), p. 26. — En el libro de Hobson la pág. está indicada por 25, pero esta pág. contiene precisamente un teorema preparatorio; para las observaciones que siguen puede ser útil notar que el teorema en cuestión retorna varias veces en la memoria de Young con pequeñas modificaciones y complementos; así lo esencial ya se encuentra en el Teor. 4 de la pág. 20, donde solamente en lugar de conjuntos generales G_n se consideran conjuntos de intervalos; y, para eliminar cualquier duda acerca de la interpretación que el A. daba a su propio teorema, en la pág. 28 el teor. 7 resume el anterior en la forma: Dada una infinidad de conjuntos de puntos, contenidos en un conjunto de medida (interior) finita, si la medida interna de esos conjuntos tiene un límite inferior positivo g , entonces existe un sistema infinito de dichos conjuntos que tienen en común un conjunto de medida (interna) $\geq g$.

cerrados de G_n es mayor que una cierta cantidad positiva g , la misma para todos los valores de n , entonces existe un sistema infinito de esos conjuntos que tienen en común un grupo de puntos de potencia c , cuya medida de los componentes cerrados tiene límite superior $> g$.

Lo esencial de la diferencia entre el enunciado de Hobson y el de Young está en las últimas palabras, en cuanto Hobson dice que «cada uno de los puntos del conjunto considerado pertenece a infinitos de los conjuntos dados», mientras Young afirma que el conjunto considerado «es común a infinitos de los conjuntos dados». Hobson no da relieve explícito a esta diferencia y por otra parte reproduce en todos los detalles la misma demostración de Young; sin embargo lo que vamos a mostrar es que el teorema es exacto en la forma de Hobson y equivocado en la de Young; lo que puede afirmarse en más del enunciado de Hobson para acercarse al de Young es únicamente que existe un sistema infinito de los conjuntos dados que tienen en común infinitos puntos; es también muy probable que pueda afirmarse que estos infinitos puntos forman un conjunto de la potencia del continuo; pero sin duda puede muy bien este conjunto común no tener medida mayor que cero.

Para la claridad damos rápidamente la demostración de Young y Hobson: sean $Q_1, Q_2, \dots$ conjuntos cerrados contenidos respectivamente en $G_1, G_2, \dots$ y de medidas $> C$; determinemos un m tal que $mC \leq l < (m+1)C$; sea $n > m+1$ e indiquemos por I_{1n} la medida de los conjuntos de puntos comunes a dos (por lo menos) de los n conjuntos $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$; es $I_{1,n} > \left(1 - \frac{m+1}{n}\right)C$. En efecto, la medida del conjunto de los puntos comunes a uno determinado Q_i (cualquiera) de dichos conjuntos y a alguno de los restantes será $\leq I_{1,n}$; la medida del conjunto de los puntos que pertenecen al Q_i elegido y a ninguno de los restantes es luego $> C - I_{1,n}$; reuniendo todos estos conjuntos, para todos los i , se obtiene el conjunto de los puntos que pertenecen a uno solo de los $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$; y, pues ellos no tienen puntos comunes, la medida de este conjunto total será $> n(C - I_{1,n})$; por tanto

$$n(C - I_{1,n}) < l < (m+1)C,$$

de donde sigue la limitación de I_{1n} . La misma conclusión se ten-

dría considerando otros grupos sucesivos de n conjuntos $Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_{2n}; Q_{2n+1}, \dots, Q_{3n}$, etc. Se obtiene de esta manera una sucesión de infinitos conjuntos cada uno de los cuales está constituido por puntos comunes por lo menos a dos conjuntos dados, pero pertenecientes a grupos distintos de n de esos conjuntos y cada uno de los cuales tiene medida $> \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) C$.

Repitiendo el razonamiento para esta sucesión y considerando de ella sistemas de n' conjuntos se obtendrá una sucesión de conjuntos cada uno de los cuales tiene medida $> \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \times$

$\left(1 - \frac{m+1}{n'}\right) C$ y está constituido por puntos comunes a dos pares distintos (por lo tanto a 4) de los conjuntos dados. Siguiendo análogamente se viene constituyendo conjuntos de puntos que son comunes (para cualquier entero p) a 2^p de los conjuntos dados y cuya medida es

$$> \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \left(1 - \frac{m+1}{n'}\right) \dots \left(1 - \frac{m+1}{n^{(p)}}\right) C.$$

Los números $n, n', \dots, n^{(p)}$ han quedado indeterminados; fijado arbitrariamente un ε pongamos en general

$$n^{(v)} \geq \frac{2^{v+1}(m+1)}{\varepsilon};$$

se calcula entonces fácilmente que dichas medidas quedan siempre $> (1 - \varepsilon)C$ y haciendo tender $p \rightarrow \infty$ se obtiene el teorema.

Resulta claro que bien se ha generado un conjunto de puntos cada uno de los cuales es común a una infinidad de conjuntos elegidos entre los dados; pero se ve fácilmente que las cadenas posibles de infinitos conjuntos así definidos constituyen una infinidad de la misma potencia del continuo, de manera que ninguna conclusión se puede sacar respecto de los puntos comunes a una misma de esas infinitudes.

Un pequeño progreso puede hacerse de la manera siguiente: supóngase fijado un punto que ya se sabe ser común a infinitos conjuntos de los dados; en los infinitos conjuntos que lo con-

tienen exclúyase un pequeño entorno alrededor de este punto; quedan infinitos conjuntos cuyas medidas pueden suponerse todavía $> C$; aplicando entonces a este sistema el teorema demostrado resulta que existe un conjunto de puntos de medida $> C$, cada uno de los cuales pertenece, conjuntamente con el punto previamente fijado, a una infinidad de conjuntos del sistema dado. El razonamiento se puede continuar evidentemente demostrando que los puntos de los cuales se ha demostrado la existencia pueden distribuirse en sistemas infinitos, cada uno de los cuales pertenece a una misma infinidad de los conjuntos dados. Pero el procedimiento no nos permite decir que dichos sistemas infinitos sean más que numerables.

Pasemos ahora a algunos ejemplos.

1º. Supongamos escritos los números del intervalo $(0, 1)$ en el sistema binario; y supongamos que el conjunto G_n sea constituido por todos los números cuya cifra n -ma es 0 (los números cuyas cifras, a partir de una cierta, son 1 se excluyen, porque se presentan en otra forma como números de un número finito de cifras $\neq 0$). Todos los conjuntos G_n tienen claramente la medida $\frac{1}{2}$. Cada número del intervalo $(0, 1)$ pertenece a una infinidad de conjuntos determinada por sus cifras 0; a la misma infinidad pertenecen todos los números que se obtienen sustituyendo en el número dado las cifras 1 por 0 en un modo cualquiera. Se sigue que cualquier número N que comprenda infinitas cifras 1 pertenece, conjuntamente con una infinidad no numerable de otros puntos, a un mismo sistema de infinitos conjuntos G_n . Pero se ve fácilmente que el conjunto formado por estos puntos tiene medida 0. En efecto, por hipótesis general, el número N comprende infinitas cifras 0; podemos luego fijar en él una cifra 0 que sea precedida por otras p cifras 0, siendo p un entero arbitrario; indiquemos con q el número de cifras 1 que preceden dicha cifra 0; cambiando en todos los modos posibles por 0 estas cifras 1 se obtienen $2^q - 1$ números. Si en uno de estos números cambiamos las cifras que siguen el 0 fijado en otras (0 o 1) en modo del todo arbitrario, obtenemos un conjunto de puntos cuya medida es $1 : 2^{p+q+2}$; por lo tanto el conjunto de los números que se obtiene de N o de cada uno de dichos $2^q - 1$ números cambiando por 0 cierto grupo de cifras 1 que sigan aquel 0 fijado tendrá medida $\leq 1 : 2^{p+q+2}$

y el conjunto de los números obtenidos efectuando esa sustitución en todos los $2q$ números tendrá medida

$$\leq \frac{2q}{2^{p+q+2}} = \frac{1}{2^{p+2}}.$$

Como p puede elegirse grande como se quiera, esto significa que el conjunto formado por N y por los números que se obtienen del número N al cambiar por 0 cualquier grupo de sus cifras 1 tiene medida 0.

Hemos obtenido así un ejemplo de una sucesión de conjuntos que realiza las hipótesis del teorema, y realiza también abundantemente la tesis, entendida en el sentido de Hobson, (decimos abundantemente porque el conjunto de los puntos comunes a infinitos conjuntos de la sucesión tiene medida 1 mientras tiene medida $1:2$ cada uno de estos conjuntos); pero estos puntos se distribuyen sobre un sistema no numerable de grupos de infinitos conjuntos, cada uno de los cuales tiene un conjunto no numerable de medida 0 de puntos comunes.

El ejemplo parece tener características bastante generales para hacer verosímiles las proposiciones enunciadas bajo la reserva de simple probabilidad.

2º. El ejemplo siguiente, mientras posiblemente entra menos adentro en el análisis del problema, tiene la ventaja de demostrar que la falsedad de la proposición de Young no se reduce a una simple cuestión de detalles en cuanto, por la aplicación de dicha proposición a un determinado problema de análisis, se llega a conclusiones contradictorias.

Consideremos el conjunto de las funciones

$$f_n(x) = \cos nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

definidas en el intervalo $0 - 2\pi$; vamos a mostrar que el teorema de Young nos conduciría a afirmar que se puede elegir una sucesión de valores de n de manera que la sucesión de las funciones correspondientes sea uniformemente convergente en un sistema de puntos de medida 2π ; por otra parte, demostraremos que esta afirmación es absurda.

Sea

$$-1 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = +1 \quad (1)$$

una subdivisión del intervalo $-1-+1$ en k intervalos parciales de amplitud $< \varepsilon$, y sea E_n^i el conjunto de los puntos x del intervalo $0-2\pi$ tales que

$$a_{i-1} \leq \cos nx \leq a_i \quad (2)$$

Para cada n el intervalo $0-2\pi$ resulta descompuesto en k conjuntos E_n^i y uno al menos de estos tendrá medida $\geq \frac{2\pi}{k}$. Según el teorema de Young podrá elegirse una sucesión de valores de n

$$n_1, n_2, \dots \quad (3)$$

tales que le corresponde un conjunto E' de medida $\geq \frac{2\pi}{k}$ de valores de x para los cuales las funciones f_{n_i} toman valores, cada una dentro de un determinado intervalo (2); pero siendo los intervalos (2) en número finito, podemos elegir ulteriormente dentro de la sucesión (3) una sucesión parcial

$$n'_1, n'_2, \dots \quad (4)$$

tal que los valores de las funciones $f_{n'_i}$ en E' caigan todos dentro de un mismo de los intervalos (2).

Indiquemos con l_1 la medida de E' e indiquemos con $E_n'^i$ los conjuntos que se obtienen suprimiendo en cada E_n^i los elementos de E' que les pertenecen; brevemente $E_n'^i = E_n^i - E'$. La medida del conjunto total $\sum E_n'^i$ vale $2\pi - l_1$, y, pues para n fijo los $E_n'^i$ son en número de k , habrá entre ellos alguno que tiene medida $\geq \frac{2\pi - l_1}{k}$. Supongamos ahora que n recorra los valores $n'_1, n'_2, \dots$; repitiendo el razonamiento anterior concluimos que existe un conjunto $\bar{E}''$ de puntos todos exteriores a E' y de medida $\geq \frac{2\pi - l_1}{k}$ y tal que una cierta sucesión de funciones $f_{n''_i}$ correspondientes a una infinidad de valores del índice

$$n''_1, n''_2, \dots \quad (5)$$

elegidos dentro de la sucesión (4) adquieren valores todos comprendidos dentro de un mismo intervalo (2) para los valores de x pertenecientes a $\bar{E}''$.

Pongamos

$$E'' = E' + \bar{E}''$$

y sea l_2 la medida de E'' ; será

$$l_2 \geq l_1 + \frac{2\pi - l_1}{k} = \frac{2\pi}{k} + \frac{k-1}{k} l_1 \geq \frac{2\pi}{k} \left(1 + \frac{k-1}{k}\right).$$

Repitamos ahora la misma consideración, sustituyendo en cambio del conjunto E' el E'' ; llegaremos a elegir dentro de la sucesión (5) una sucesión parcial

$$n'''_1, n'''_2, \dots$$

tal que existe un conjunto $\bar{E}'''$ de medida $\geq \frac{2\pi - l_2}{k}$, completamente exterior a E'' en el cual las funciones $f_{n'''_i}$ toman valores todos pertenecientes a un mismo intervalo (2). Pondremos $E''' = E'' + \bar{E}'''$ y llamaremos l_3 a la medida de E''' . Con E''' podemos reempezar con el mismo razonamiento; después de un número p de operaciones llegaremos a haber construido un conjunto $E^{(p)}$ cuya medida será

$$\geq \frac{2\pi}{k} \left(1 + \frac{k-1}{k} + \dots + \left(\frac{k-1}{k}\right)^p\right) = 2\pi \left(1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p+1}\right)$$

y una sucesión de funciones $f_n^{(p)}$ tales que en cada punto de $E^{(p)}$ todas estas funciones toman valores comprendidos dentro de un mismo intervalo (2) (pudiendo por otra parte este intervalo ser diferente para x diferentes).

Fijado arbitrariamente un $\vartheta > 0$, aunque pequeño, podrá elegirse un p bastante grande para que la medida de $E^{(p)}$ sea $\geq 2\pi - \vartheta$; y en todos los puntos de ese $E^{(p)}$ las funciones $f_n(x)$ de una determinada sucesión infinita realizarán la condición

$$|f_r(x) - f_s(x)| < \varepsilon \quad (6)$$

cualesquiera que sean los índices r y s .

Vamos a demostrar que esta condición contradice otras propiedades de las funciones $\cos nx$.

Para eso, sean r y x módulo y argumento en un plano de Gauss de la variable $z = \xi + i\eta$; la función analítica que sobre la circunferencia de radio 1 toma los valores e^{inx} es evidentemente $z^n = r^n e^{inx}$; por tanto la función armónica de ξ, η que

sobre la circunferencia de radio 1 toma los valores $\cos nx$ es $r^n \cos nx$. Aplicando la fórmula de Poisson al cálculo del valor de esta función en un punto interior a la circunferencia, se tiene luego

$$r^n \cos nx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos (x-t)} dt.$$

Se sigue, para dos valores n_1, n_2 cualesquiera de n ,

$$\begin{aligned} & |r^{n_1} \cos n_1 x - r^{n_2} \cos n_2 x| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos n_1 t - \cos n_2 t| \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos (x-t)} dt; \end{aligned} \quad (7)$$

luego

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |r^{n_1} \cos n_1 x - r^{n_2} \cos n_2 x| dx \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt |\cos n_1 t - \cos n_2 t| \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos (t-x)} dx \\ & = \int_0^{2\pi} |\cos n_1 t - \cos n_2 t| dt. \end{aligned}$$

Si en $E(p)$ las funciones $\cos n_1 x, \cos n_2 x$ realizan la condición (6), mientras, evidentemente, en el conjunto complementario, de medida $\leq \vartheta$, $|\cos n_1 x - \cos n_2 x| \leq 2$, resulta

$$\int_0^{2\pi} |r^{n_1} \cos n_1 x - r^{n_2} \cos n_2 x| dx \leq 2\pi\epsilon + (2-\epsilon)\vartheta. \quad (8)$$

Supongamos fijado n_1 y hagamos crecer n_2 indefinidamente; se calcula fácilmente que, si al mismo tiempo se hace tender r a 1 como $(n_1 : n_1 + n_2)^{1/n_2}$, la función integranda en (8) tiende uniformemente a $|\cos n_1 x|$; pero se tiene

$$\int_0^{2\pi} |\cos n_1 x| dx = \frac{1}{n_1} \int_0^{2n_1\pi} |\cos \xi| d\xi = \frac{1}{n_1} \cdot 4n_1 \int_0^{2/\pi} \cos \xi d\xi = 4,$$

resultando por tanto absurda la (7), donde ε y δ pueden hacerse arbitrariamente pequeños.

La contradicción puede todavía desarrollarse de varias maneras; supongamos que se realice la condición

$$|\cos n_1 x - \cos n_2 x| \leq \varepsilon \quad (9)$$

sobre un conjunto de valores de x de medida finita μ (>0 , pero no necesariamente próxima a 2π). Por propiedades conocidas de la medida de Lebesgue existe entonces un conjunto parcial de igual medida de «puntos de densidad» cada uno de los cuales está contenido dentro de infinitos intervalos de valores de x en los cuales la razón entre las medidas del conjunto de los puntos en que se realiza (9) y del conjunto complementario es grande como se quiera, tendiendo a ∞ con estrecharse el intervalo considerado alrededor del punto de densidad⁽³⁾. Por otra parte se sabe que en el cálculo de la integral de Poisson, cuando el punto (r, x) es bastante próximo a un determinado arco finito, la contribución de la parte de la integral extendida al arco complementario puede hacerse pequeña como se quiere. En estas condiciones, descomponiendo en (7) el intervalo de integración en el conjunto donde se realiza (9) y en el complementario, se puede ver que, para los valores de x en un conjunto de puntos de densidad, todavía de medida μ , dicha integral resultaría tan próxima como se quiera a ε por valores de r bastante próximos a 1. Pero, eligiendo n_1 bastante grande puede hacerse en modo que en dicho conjunto exista una parte en la cual $|\cos n_1 x|$ supere ε conservándose, por ej., próximo a 1. Se obtiene luego una contradicción análoga a la anterior; en particular resulta: *De la sucesión de las funciones $f_n = \cos nx$ no es posible extraer una sucesión parcial que sea uniformemente convergente en un conjunto de puntos de medida finita ($\mu > 0$)*. Nótese que, por contrario, de una nueva aplicación del teorema de Young, se generaría la existencia

(3) Las nociones relativas a la densidad local de conjuntos lineales han sido profundizadas en la memoria P. CAPELLI y M. COTLAR, *Algunas cuestiones vinculadas a una posible extensión del principio de conservación de dominios*. Publicaciones del Instituto de Matemáticas. Vol. VI (Homenaje a Rey Pastor). Rosario, 1944. Ver particularmente, para aplicaciones a la integral de Poisson el § 14.

de tal sucesión. Bastaría tomar nuevamente el razonamiento anterior y decir: Sea fijada una sucesión de números

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots \quad \lim \varepsilon_i = 0;$$

correspondientemente a cada uno de ellos se puede determinar una sucesión de funciones como la $\{f_n^{(p)}\}$ y una sucesión de conjuntos como $E^{(p)}$, con la ulterior condición que las funciones que corresponden a cierto ε_i pertenezcan a la sucesión que corresponde al anterior ε_{i-1} e igualmente los conjuntos como $E^{(p)}$ sean contenidos cada uno en el anterior. El conjunto E^* común a todos estos podrá todavía tener medida próxima como se quiera a 2π ; formando entonces una nueva sucesión de funciones eligiendo una en cada una de las sucesiones aludidas (p. ej. siempre la primera), se obtendría precisamente la deseada sucesión de funciones uniformemente convergente en todos los puntos de E^* , porque la diferencia de los valores de estas funciones en puntos de E^* sería en valor absoluto, para funciones de lugar bastante elevado en la sucesión, menor que cualquier ε_i .

Nótese todavía que las conclusiones obtenidas con el aludido análisis más detallado de la integral de Poisson, ya contradicen a la existencia del conjunto E' de medida $\geq \frac{2\pi}{k}$, sin que tampoco fuese necesario construir el $E^{(p)}$.

Con todo eso, es evidente, por contrario, que conjuntos de medida 0 y de la potencia del continuo en los cuales una sucesión de funciones de la forma $\cos nx$ converge uniformemente se construyen con toda facilidad; el procedimiento siguiente parece tener cierto interés por su generalidad:

Póngase $x = 2\pi y$; los valores de y tendrán que estar en intervalo 0-1 y por lo tanto, en un sistema de numeración cualquiera que, por comodidad supondremos ser el decimal, podrán escribirse en la forma $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ donde las a_i son cifras. Pongamos ahora

$$n_i = 10^{\frac{i(i+1)}{2}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

y consideremos el conjunto de los números de la forma

$$y = 0, a_1 a_1 a_2 a_1 a_2 a_3 a_1 \dots a_1 a_2 \dots a_p a_1 a_2 \dots a_{p+1} \dots$$

donde las a_i son cifras cualesquiera; es evidente que poniendo

$$Y = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_p a_{p+1} \dots,$$

resulta *uniformemente*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \cos 10^{\frac{i(i+1)}{2}} 2\pi y = \cos 2\pi Y$$

y los números Y recorren todos los valores del intervalo $0-1$; por tanto los valores límites considerados llenan todo el intervalo $-1-+1$; el conjunto de los números y tiene la potencia del continuo; sin embargo, por lo anteriormente dicho, el conjunto de estas y tiene medida 0.

Mischa Cotlar - Beppo Levi

BUENOS AIRES

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ROSARIO.

LOS POLINOMIOS DE APROXIMACION DE sen x Y cos x

En un artículo publicado en el fasc. 1 de este año el Prof. Uspensky ha dado a conocer una interesante demostración de las series para sen x y cos x ⁽¹⁾ siguiendo razonamientos puramente algebraicos y por tanto que, como dice el autor, podían estar al alcance de los matemáticos más vecinos al tiempo de Newton, para dar de dichas series una demostración rigurosa que aquel sabio, por múltiples razones ⁽²⁾, no ha suministrado.

La demostración de Uspensky va también más allá, por cuanto demuestra una notable propiedad de los polinomios aproximativos obtenidos cortando las series a un término cualquiera que ciertamente no era en el pensamiento del tiempo, máxime si se la considera, como es, válida para valores de la variable grandes como se quiera en el campo positivo.

En lo que sigue vamos a presentar otra demostración que nos parece responder a los mismos requisitos y posiblemente todavía más adherente a los conceptos corrientes del tiempo, por referirse únicamente a la teoría de las funciones trigonométricas y a la noción de aproximación que todavía no se había desarrollado en la nuestra más precisa de límite.

1. Supondremos conocidas únicamente las propiedades siguientes:

a) Cualquiera que sea $x > 0$

$$|\operatorname{sen} x| < x, \quad |\cos x| \leq 1$$

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{x} > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad |\cos x| > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

⁽¹⁾ J. V. USPENSKY, *Dedución elemental de las series sen x y cos x* - Math. Notæ - Año IV (1944) p. 1 - 10.

⁽²⁾ Ver la nota histórica de L. A. SANTALÓ - *Isaac Newton y el binomio* - Math. Notæ - Año II (1942) p. 62-72.

Como se sabe, las cuatro desigualdades tienen fundamento muy elemental, más elemental aún (y en efecto establecen limitaciones menos precisas) de lo que se encuentra ordinariamente en los tratados de trigonometría ⁽³⁾.

Nos resultará cómodo reunir las cuatro desigualdades en la forma

$$1 \geq \left\{ \begin{array}{c} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \\ \left| \cos x \right| \end{array} \right\} > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (\text{A})$$

b) Para cualquier entero positivo n vale la fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned} \sin nx &= n \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \dots \\ &\quad \pm \binom{n}{n_1} \sin^{n_1} x \cos^{n-n_1} x \\ &= \sum_{q=0}^{q=\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^q \binom{n}{2q+1} \sin^{2q+1} x \cos^{n-2q-1} x \end{aligned} \quad (\text{B})$$

$$\cos nx = \sum_{q=0}^{q=\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^q \binom{n}{2q} \sin^{2q} x \cos^{n-2q} x \quad (\text{B}')$$

donde hemos indicado por n_1 el número n o $n-1$ según sea n impar o par, y, como de costumbre, por $[\alpha]$ la parte entera del número α .

⁽³⁾ Las dos primeras expresan propiedades inmediatas de las cuerdas de un círculo; la tercera es también evidente para valores de $x \geq \pi:2 > \frac{1}{2}\pi$; para $0 < x < \pi:2$, ella se reduce a la última, a consecuencia de

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x > x;$$

finalmente la última se deduce inmediatamente de la primera a razón de la igualdad

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

(Cmp. E. O. FERRARI, *Sobre la acotación de las funciones trigonométricas*. Math. Notæ - Año I p. 145).

Estas fórmulas se obtienen fácilmente por inducción, como se sabe, de las fórmulas para la suma de los arcos (4).

c) Para $\xi \leq \frac{1}{2}$, la suma de un número cualquiera de términos de la forma

$$1 + \xi + \xi^2 + \dots$$

es siempre < 2 .

Daremos nuestra demostración solamente para la expresión de $\sin x$, razonando para eso sobre la fórmula (B); con razonamiento idéntico, partiendo de (B') se obtendrá la serie de $\cos x$, o más precisamente (cfr. n. 3 y 4) el hecho que los polinomios obtenidos cortando esta serie después de un término positivo son todos $> \cos x$ y cortando después de un término negativo son todos $< \cos x$. Por otra parte las propiedades del coseno y del seno se deducen las unas de las otras a través de las relaciones algebraicas que ligan las dos funciones (5).

2. Poniendo en la (B) $\frac{x}{n}$ en lugar de x y multiplicando y dividiendo el término general por $\left(\frac{x}{n}\right)^{2q+1}$ resulta:

$$\sin x = \sum_{q=0}^{q=\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^q \left(\prod_{i=0}^{i=2q} \frac{n-i}{n} \right) \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^{2q+1} \cos^{n-2q-1} \frac{x}{n}. \quad (1)$$

De (A) se obtiene en seguida

$$1 \geq \left(\frac{|\sin x|}{x} \right)^{2q+1} |\cos^{n-2q-1} x| > \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)^n;$$

por otra parte, se demuestra notoriamente por inducción que,

(4) En todos los libros de álgebra se obtienen también por aplicación de la fórmula del binomio de Newton al complejo $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, para lo cual tampoco es necesario pasar por el número e . (cfr. LEVI, *Analisi matematica algebrica e infinitesimale* - Bologna - Zanichelli - 1937 - p. 93-94).

(5) Ver por ej. USPENSKY - l. c. n. 5.

si $\alpha < 1$, $(1-\alpha)^n > 1-n\alpha$ ⁽⁶⁾; se sigue que, para n bastante grande (por ej. $n > x^2$)

$$1 \geq \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^{2q+1} \cos^{n-2q-1} \frac{n}{x} > 1 - \frac{x^2}{2n}. \quad (2)$$

Análogamente se tiene, para cada i tal que $0 < i < 2q < n$,

$$1 > \frac{n-i}{n} > 1 - \frac{2q}{n}$$

y luego

$$1 > \prod_{i=0}^{2q} \frac{n-i}{n} > \left(1 - \frac{2q}{n} \right)^{2q+1} > 1 - \frac{2q(2q+1)}{n}. \quad (3)$$

Teniendo en cuenta el lado izquierdo de las desigualdades (2) y (3) se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{q=r}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (-1)^q \left(\prod_{i=0}^{i=2q} \frac{n-i}{n} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^{2q+1} \cos^{n-2q-1} \frac{x}{n} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} < \\ < \sum_{q=r}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} = \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} \left[1 + \frac{x^2}{(2r+2)(2r+3)} + \right. \\ \left. + \frac{x^4}{(2r+2)(2r+3)(2r+4)(2r+5)} + \dots \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Para un dado valor de x , puede siempre elegirse un R tal que para $r \geq R$

$$\frac{x^2}{(2r+2)(2r+3)} < \frac{1}{2}.$$

Por c) (n. 1) el paréntesis en el último miembro de (4) es

⁽⁶⁾ En efecto $1-\alpha > 0$, $(1-\alpha)^2 = 1-2\alpha+\alpha^2 > 1-2\alpha$, $(1-\alpha)^3 > (1-2\alpha)(1-\alpha) > 1-3\alpha$,

entonces < 2 . Fijado arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, puede entonces hacerse todavía crecer r bastante como para que $x^{2r+1} : (2r+1)! < \varepsilon : 2$; en estas condiciones el primer miembro de (4) será siempre $< \varepsilon$. Se sigue que podemos determinar un número $P = 2r + 1$ tal que, para cualquier $n > P$ y para cualquier entero impar p tal que $P < p < n$,

$$\left| \sin x - \sum_{q=0}^{q=\frac{p-1}{2}} (-1)^q \left(\prod_{i=0}^{2q} \frac{n-i}{n} \right) \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^{2q+1} \cos^{n-2q-1} \frac{x}{n} \cdot \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \right| < \varepsilon. \quad (5)$$

Supongamos fijado para p un valor $> P$, reservándonos de hacer crecer n cuanto será necesario; teniendo en cuenta nuevamente las desigualdades (2) y (3), obtenemos, para cualquier $q \leq \frac{p-1}{2}$,

$$\begin{aligned} 1 &> \left(\prod_{i=0}^{2q} \frac{n-i}{n} \right) \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^{2q+1} \cos^{n-2q-1} \frac{x}{n} \\ &> \left(1 - \frac{2q(2q+1)}{n} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2n} \right) > 1 - \frac{4q(2q+1) + x^2}{2n}; \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{q=0}^{q=\frac{p-1}{2}} (-1)^q \left(\prod_{i=0}^{2q} \frac{n-i}{n} \right) \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^{2q+1} \cos^{n-2q-1} \frac{x}{n} \cdot \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q=0}^{q=\frac{p-1}{2}} (-1)^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \right| \\ &< \sum_{q=0}^{q=\frac{p-1}{2}} \frac{4q(2q+1) + x^2}{2n} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} < \frac{2p(p-1) + x^2}{2n} M \quad (6) \end{aligned}$$

donde se ha puesto

$$M = \sum_{q=0}^{q=\frac{p-1}{2}} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!},$$

que, por ser x y p números fijados es un número finito y determinado que no importa calcular.

De (5) y (6) resulta

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \right| < \varepsilon + \frac{2p(p-1)+x^2}{2n} M;$$

el primer miembro es independiente de n ; el segundo miembro, al crecer n , se hace tan próximo a ε como se quiera. Por tanto

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \right| \leq \varepsilon. \quad (7)$$

3. Consideremos ahora un polinomio de la forma

$$S_p = \sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \quad (8)$$

donde sea $\frac{p-1}{2}$ impar ($p \equiv 3 \pmod{4}$); puede escribirse

$$\begin{aligned} S_p &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \dots + \left(\frac{x^{p-2}}{(p-2)!} - \frac{x^p}{p!}\right) \\ &= x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \dots + \frac{x^{p-2}}{(p-2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(p-1)p}\right). \end{aligned}$$

En la última expresión los paréntesis forman claramente una sucesión creciente; y, si se supone

$$(p-1)p > x^2, \quad (9)$$

a partir de un cierto término son positivos. Como los polinomios S_p que corresponden a valores crecientes de p se obtienen uno de otro por agregación de nuevos términos de la misma forma, se sigue que, para los valores de p que realizan (9), ellos mismos forman una sucesión creciente. Digo que ellos son todos $< \operatorname{sen} x$. Supongamos en efecto que para cierto valor p_0 de p fuese

$$S_{p_0} \geq \operatorname{sen} x; \quad (10)$$

siempre suponiendo realizada (9), elíjase ε tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{x^{p_0+2}}{(p_0+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(p_0+3)(p_0+4)}\right). \quad (11)$$

Se demostró en el n. 3 que puede determinarse un P tal que para $p \geq P$ los polinomios S_p difieren de $\operatorname{sen} x$ en menos que ε . Para $p \geq (P, p_0 + 1)$ por (10) y (11) se obtendría

$$S_p > S_{p_0} + \varepsilon \geq \operatorname{sen} x + \varepsilon.$$

mientras por (7) debe ser

$$|S_p - \operatorname{sen} x| < \varepsilon.$$

Es por tanto absurda la suposición (10), es decir que los polinomios S_p , para p suficientemente grande $\equiv 3 \pmod{4}$ son todos $< \operatorname{sen} x$. Precisamente si la proposición se realiza para un cierto p se realiza también para todos los valores mayores; en efecto, según el razonamiento precedente sólo podría no realizarse la proposición para alguno de los primeros valores de p , cuando, por no ser satisfecha la condición (9), los polinomios S_p partiendo de un valor $> \operatorname{sen} x$ para $p=3$, pudieran en un primer principio disminuir mientras p crece. Vamos a mostrar que este caso no ocurre efectivamente.

Notemos primero que la condición (9) se verifica para cualquier valor de p si $x < \sqrt{6}$.

Para $\sqrt{6} \leq x < \pi$ el primer binomio en la expresión de S_p es negativo o nulo, mientras $\operatorname{sen} x$ es positivo. Luego ciertamente $S_3 < \operatorname{sen} x$, y, por lo dicho, $S_p < \operatorname{sen} x$, cualquiera que sea p .

Finalmente para $x \geq \pi$

$$S_3 \leq \pi \left(1 - \frac{\pi^2}{6}\right) < -1 \leq \operatorname{sen} x,$$

de donde nuevamente se infiere que $S_p < \operatorname{sen} x$ para todos los valores de p . Resumiendo hemos demostrado que *cualquiera que*

sea x y cualquiera que sea $p \equiv 3 \pmod{4}$, los polinomios S_p son siempre $< \sin x$.

4. Para $p \equiv 1 \pmod{4}$ (es decir $\frac{p-1}{2}$ par) el polinomio S_p se escribe

$$S_p = x - \frac{x^3}{3!} \left(1 - \frac{x^2}{4.5}\right) - \frac{x^7}{7!} \left(1 - \frac{x^2}{8.9}\right) - \dots \\ - \frac{x^{p-2}}{(p-2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(p-1)p}\right).$$

Se repiten entonces sobre los paréntesis las mismas observaciones anteriores; pero, por ser éstos precedidos por el signo menos, para los valores de p que satisfacen (9) los valores de los polinomios decrecen al crecer p . El razonamiento precedente se repite entonces cambiando únicamente los signos $>$ y $<$; se demuestra por tanto absurda la hipótesis que, para valores bastante elevados de p fuese $S_p < \sin x$. Para los valores pequeños, que no satisfacen (9), resultando creciente la sucesión de los S_p , esta hipótesis se justificaría solamente en el caso que fuese $< \sin x$ el primero $S_1 = x$; pero ya se sabe que tal no es. Se concluye por tanto que *cualquiera que sea x y cualquiera que sea $p \equiv 1 \pmod{4}$, los polinomios S_p son siempre $> \sin x$.*

Se nota que para valores grandes de p la diferencia entre polinomios de las dos clases ($p \equiv 1$ y $p \equiv 3 \pmod{4}$) se hace pequeña como se quiera; esos polinomios proporcionan luego aproximaciones de $\sin x$.

B. Levi

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ROSARIO.

SOLUCION A LA CUESTION N.º 11

La cuestión N.º. 11, propuesta en el Año III, pág. 184, se enuncia:

Se tiene una sucesión infinita de variables casuales $x_1, x_2, x_3, \dots$ que toman valores en el intervalo $0-L$. Siendo $k < L$ un número fijo del mismo intervalo. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto infinito $\prod \frac{x_i}{k}$ sea < 1 ?

SOLUCIÓN. Para resolver el problema hace falta conocer la ley de probabilidad según la cual se distribuyen los puntos x_i en el intervalo $0-L$. Vamos a suponer, como es costumbre en la teoría de las probabilidades geométricas, que la distribución sea uniforme, o sea, que la probabilidad de que un punto x_i sea interior a un segmento a contenido en el intervalo $0-L$, sea proporcional a la longitud a del mismo. Esta probabilidad deberá entonces ser igual a a/L , para que la probabilidad de que el punto x_i esté contenido en el segmento $0-L$ sea igual a la unidad. Entonces la probabilidad elemental para que el punto x_i esté comprendido en el intervalo $x_i, x_i + dx_i$ será dx_i/L .

Supondremos además que los puntos x_i estén dados independientemente unos de otros. Con esto, suponiendo primero que se trata de un número finito de puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$, la probabilidad de que sea $\prod \frac{x_i}{k} < 1$ será igual al valor de la integral

$$P_n = \int_{x_1 x_2 \dots x_n < k^n} \frac{dx_1}{L} \frac{dx_2}{L} \frac{dx_3}{L} \dots \frac{dx_n}{L} \cdot (0 \leq x_i \leq L). \quad (1)$$

Prescindiendo del factor $1/L^n$, esta integral nos dice que el problema equivale, para un número finito n de puntos, al

cálculo del volumen llenado por los puntos del espacio de n dimensiones cuyas coordenadas cartesianas rectangulares cumplen la condición $x_1 x_2 x_3 \dots x_n < k^n$, siendo, además, interiores al hipercubo de arista L .

Supongamos primero el caso $n=2$. Hay que calcular el área de la parte de plano limitada por los lados del cuadrado de lado L , construido sobre los ejes a partir del origen como vértice, y que es exterior a la hipérbola de ecuación $x_1 x_2 = k^2$. Siendo siempre $0 \leq x_i \leq L$, el valor de esta área será

$$\int_{x_1 x_2 < k^2} dx_1 dx_2 = k^2 + \int_{k^2/L}^L \frac{k^2}{x_1} dx_1 = k^2 \left(1 + \log \frac{L^2}{k^2} \right). \quad (2)$$

Según (1) la probabilidad buscada, para este caso de $n=2$, valdrá

$$P_2 = \frac{k^2}{L^2} \left(1 + 2 \log \frac{L}{k} \right). \quad (3)$$

Para el caso general, según dijimos, el problema consiste en calcular la integral $\int dx_1 dx_2 \dots dx_n$ extendida a los puntos interiores al hipercubo $0 \leq x_i \leq L$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) y cuyas coordenadas cumplen la condición $x_1 x_2 x_3 \dots x_n < k^n$.

Llamando I_n a esta integral, vamos a demostrar que

$$I_n = k^n \left[1 + n \log \frac{L}{k} + \frac{n^2}{2!} \log^2 \frac{L}{k} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \log^{n-1} \frac{L}{k} \right] \quad (4)$$

que se puede escribir en la forma

$$I_n = k^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} \log^p \frac{L}{k}. \quad (5)$$

Para $n=2$, es la fórmula (2) ya demostrada. Supuesta cierta para el índice $n-1$, vamos a demostrar que lo es para n .

Siempre dentro de los límites $0 \leq x_i \leq L$, es

$$I_n = \int_{x_i=0}^{x_i=L} dx_n \int_{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \leq \frac{k^n}{x_n}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} + \int_{x_n=L} dx_n \int_{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \leq \frac{k^n}{x_n}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}. \quad (6)$$

El primer sumando vale k^n . En el segundo sumando figura una integral del mismo tipo que las I_n , con la diferencia de que hay solamente $n-1$ variables y el extremo superior de su producto es ahora k^n/x_n en lugar de k^n como antes. Como suponemos que (5) es cierta para $n-1$, podemos aplicarla teniendo en cuenta que en lugar de k figurará $\left(\frac{k^n}{x_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ y en lugar de n habrá que poner $n-1$. Será

$$\int_{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \leq \frac{k^n}{x_n}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = \frac{k^n}{x_n} \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p!} \log^p \frac{L^{n-1} x_n}{k^n}.$$

Cada sumando de esta suma nos da, sustituyendo en (6),

$$\begin{aligned} \frac{k^n}{p!} \int_{\frac{k^n}{L^{n-1}}}^L \log^p \frac{L^{n-1} x_n}{k^n} \frac{dx_n}{x_n} &= \frac{k^n}{p!} \int_{\frac{k^n}{L^{n-1}}}^L \left(\log x_n + \log \frac{L^{n-1}}{k^n} \right)^p d \log x_n \\ &= \left[\frac{k^n}{(p+1)!} \left(\log x_n + \log \frac{L^{n-1}}{k^n} \right)^{p+1} \right]_{\frac{k^n}{L^{n-1}}}^L = \frac{k^n}{(p+1)!} \log^p \frac{L^n}{k^n}. \end{aligned}$$

Haciendo la suma desde $p=0$ hasta $p=n-2$ y sustituyendo en (6) resulta efectivamente (5) o su equivalente (4) que queríamos demostrar.

La probabilidad, según (1) será por tanto

$$P_n = \frac{k^n}{L^n} \left[1 + n \log \frac{L}{k} + \frac{n^2}{2!} \log^2 \frac{L}{k} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \log^{n-1} \frac{L}{k} \right]. \quad (7)$$

Para resolver la cuestión propuestas debemos ahora hallar el límite de esta expresión para $n \rightarrow \infty$.

Llamando, por comodidad de escritura,

$$\log \frac{L}{k} = \lambda, \quad \frac{L}{k} = e^\lambda$$

hay que hallar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda n} \left[1 + n\lambda + \frac{(n\lambda)^2}{2!} + \dots + \frac{(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} \right].$$

La expresión P_n se puede escribir

$$P_n = 1 - \frac{(n\lambda)^n}{n! e^{\lambda n}} \left(1 + \frac{n\lambda}{n+1} + \frac{(n\lambda)^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right).$$

Distinguiremos tres casos, según sea $\lambda < 1$, $\lambda > 1$, $\lambda = 1$.

a) $\lambda < 1$. En este caso es $\frac{n\lambda}{n+1} < 1$ y por tanto la serie entre paréntesis es menor que la serie geométrica de razón $\frac{n\lambda}{n+1}$ cuya suma es $\frac{n+1}{n+1-n\lambda}$; por tanto

$$1 > P_n > 1 - \frac{(n\lambda)^n}{n! e^{\lambda n}} \cdot \frac{n+1}{n(1-\lambda)+1}.$$

Aplicando la fórmula de Stirling (*), y por ser siempre $\lambda e \leq e^\lambda$ ($\lambda > 0$), se ve que el sustraendo del último miembro de la desigualdad tiene por límite cero, luego

$$\text{para } \lambda < 1, \text{ o sea } \frac{\bar{L}}{k} < e, \text{ es } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1.$$

(*) Ver, por ejemplo, E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, tomo I, pág. 280; o bien, B. LEVI, *Analisi Matematica Algebrica ed Infinitesimale*, pág. 371.

Ver también B. LEVI, *Valoraciones aproximadas de $n!$ para grandes valores de n . Aplicaciones*. "Mathematicæ Notae", Año III, p. 148-154. La fórmula de Stirling está dada en esta nota en el n.º 3; pero para la aplicación actual ya es suficiente la fórmula (2) del n.º 1 que permite afirmar que

$$\frac{(n\lambda)^n}{n! e^{\lambda n}} < \frac{(n\lambda)^n}{c_k n^{n+k} e^{n(\lambda-1)}} = \frac{1}{c_k} (\lambda e^{1-\lambda})^n \frac{1}{n^k}$$

donde k y c_k son números > 0 . Por tanto 1: c_k es un número finito, mientras que, para $n \rightarrow \infty$, $1/n^k \rightarrow 0$ e igualmente $(\lambda e^{1-\lambda})^n \rightarrow 0$ por ser $\lambda e^{1-\lambda} < 1$ para todo valor λ distinto de 1 y mayor que 0. En efecto, la función $\lambda e^{1-\lambda}$ es creciente entre 0 y 1 y para este último valor de λ vale 1; en cambio, para $\lambda > 1$ es decreciente y para $\lambda \rightarrow \infty$ tiende a cero.

b) $\lambda > 1$. Observamos que en este caso es

$$1 + n\lambda + \frac{(n\lambda)^2}{2!} + \dots + \frac{(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} < \frac{(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} n$$

puesto que el último término de la suma del primer miembro es el mayor, por ser cada uno igual al precedente multiplicado por un factor de la forma $\frac{n\lambda}{r} > 1$ ($r \leq n-1$). Luego

$$P_n < \frac{(n\lambda)^{n-1}n}{(n-1)!e^{n\lambda}} = \frac{n^n \lambda^{n-1}}{n! e^{n\lambda}}.$$

Aplicando de nuevo la fórmula de Stirling para $n!$, queda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{e^{\lambda-1}} \right)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\lambda}}$$

y como $\frac{\lambda}{e^{\lambda-1}} < 1$, resulta

para $\lambda > 1$, o sea $\frac{L}{k} > e$, es $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$.

c) $\lambda = 1$. En este caso, el valor de P_n es

$$P_n = e^{-n} \left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \right).$$

El límite de esta expresión cuando n tiende a infinito se sabe que es igual a $1/2^{(*)}$ y por tanto

para $\lambda = 1$, o sea $\frac{L}{k} = e$, es $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{2}$.

(*) Ver por ej., J. BARRAL SOUTO, "Revista de la Unión Matemática Argentina", Vol. IX, pág. 67, 1943. Una demostración más directa y elemental se encuentra en la nota citada de B. LEVI, n° 4.

En resumen, el resultado de la cuestión propuesta se puede enunciar:

Dado un hipercubo de n dimensiones de arista L construido sobre los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares, el volumen de la parte del mismo que es exterior a la hipersuperficie de ecuación $x_1 x_2 x_3 \dots x_n = k^n$, tiende a 0 para $n \rightarrow \infty$, cuando $\frac{L}{k} > e$, tiende a llenar todo el hipercubo si $\frac{L}{k} < e$ y tiende a la mitad del volumen del hipercubo cuando $\frac{L}{k} = e$.

En otras palabras:

Dado un punto de manera arbitraria, con ley de probabilidad uniforme, en el interior de un hipercubo de n dimensiones de arista L , la probabilidad de que el producto de sus distancias a n caras concurrentes sea $\leq k^n$ ($k \leq L$) está dada por (7). Al tender n a infinito, esta probabilidad tiende a 1 si $\frac{L}{k} < e$, a 0 si $\frac{L}{k} > e$, y a $1/2$ si $\frac{L}{k} = e$.

Luis A. Santaló

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ROSARIO.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 25. — En la teoría de las vibraciones de un eje que rueda sosteniendo un volante en su punto medio, los posibles períodos de vibración están determinados por las raíces de una ecuación de la forma

$$\xi \left(\operatorname{tg} \xi - \frac{1 - e^{-2\xi}}{1 + e^{-2\xi}} \right) = a \quad (a > 0)$$

Se pide un estudio de esta ecuación y del cálculo aproximado de sus raíces.

1. Observamos en primer lugar que se puede escribir

$$\frac{1 - e^{-2\xi}}{1 + e^{-2\xi}} = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}} = \operatorname{tgh} \xi$$

esta expresión, lo mismo que $\operatorname{tg} \xi$, cambian de signo cuando se invierte el de ξ y por lo tanto el primer miembro de la ecuación dada es una función par. Entonces de las raíces que buscamos bastará determinar sólo las positivas. Observamos entonces que las raíces sucesivas deberán encontrarse en intervalos en los cuales $\operatorname{tg} \xi > 0$ y, por lo tanto, deberán ser tales que

$$k\pi < \xi_k < k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

indicándose con k un número entero y con ξ_k una raíz genérica.

Notamos aún que en cada uno de estos intervalos existe una y una sola raíz. En efecto, derivando el factor $(\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tgh} \xi)$ se obtiene $\left(\frac{1}{\cos^2 \xi} - \frac{1}{\cosh^2 \xi} \right)$ que es siempre positivo; por lo tanto dicho factor crece con ξ ; se sigue que en el intervalo $k\pi - k\pi + \frac{\pi}{2}$

la función $\xi (\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tgh} \xi)$ crece desde un valor negativo igual a $-k\pi \operatorname{tgh} k\pi$ hasta $+\infty$ pasando por el valor de a .

Vamos a reducir aún más los intervalos dentro de los cuales deben encontrarse las sucesivas raíces.

Observamos para éso que podemos escribir

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh} \xi_k &= \frac{1 - e^{-2\xi_k}}{1 + e^{-2\xi_k}} = (1 - e^{-2\xi_k}) (1 - e^{-2\xi_k} + e^{-4\xi_k} - \dots) \\ &= 1 - 2e^{-2\xi_k} + 2e^{-4\xi_k} - \dots,\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\operatorname{tgh} \xi_k > 1 - 2e^{-2\xi_k};$$

y con mayor razón siendo $\xi_k > k\pi$,

$$\operatorname{tgh} \xi_k > 1 - 2e^{-2\pi k};$$

o sea, mediante un sencillo cálculo numérico,

$$\operatorname{tgh} \xi_k > 1 - \frac{2}{(464,2)^k} \quad (2)$$

Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \left(k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{(464,2)^k} \right) &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{(464,2)^k}}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{(464,2)^k}} \\ &= \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{(464,2)^k} \right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{(464,2)^k} + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{(464,2)^k} - \dots \right) \\ &= 1 - 2 \operatorname{tg} \frac{1}{(464,2)^k} + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{(464,2)^k} - \dots\end{aligned}$$

y con error despreciable con respecto a la aproximación usual en estos cálculos se puede escribir

$$\operatorname{tg} \left(k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{(464,2)^k} \right) = 1 - \frac{2}{(464,2)^k}$$

y comparando con (2) resulta

$$\operatorname{tgh} \xi_k > \operatorname{tg} \left(k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{(464,2)^k} \right).$$

Ahora bien, puesto que sólo se consideran raíces $\xi_k > 0$ y siendo $a > 0$ las raíces deberán ser tales que se verifique

$$\operatorname{tgh} \xi_k < \operatorname{tg} \xi_k.$$

Deducimos que los intervalos en que están contenidas las sucesivas raíces serán tales que

$$k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{(464,2)^k} < \xi_k < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

con lo cual hemos reducido casi a la mitad los intervalos (1).

2. Para la determinación precisa de las raíces notamos que la ecuación dada puede escribirse en la forma

$$\xi = \frac{a}{\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tgh} \xi} \quad (4)$$

cuyo segundo miembro, de acuerdo a una observación anterior, decrece al crecer ξ . Resulta entonces que si se conoce por ejemplo una raíz ξ_0 aproximada por exceso, al reemplazar ese valor en el segundo miembro de (4) se obtiene en el primer miembro un valor

$$\xi_1 = \frac{a}{\operatorname{tg} \xi_0 - \operatorname{tgh} \xi_0}$$

que será una raíz aproximada por defecto. Por lo tanto al tomar ξ_0 o ξ_1 como valor de la raíz el error cometido será evidentemente menor que $\xi_0 - \xi_1$.

Si la aproximación obtenida no es suficiente, la observación hecha facilita la aplicación de algún método de aproximaciones sucesivas, como por ejemplo el método *dicotómico* o bien el de Newton ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Ver por ejemplo en *Mathematicæ Notæ*, año 1º pág. 37 la nota: B. LEVI, *La aproximación como instrumento de cálculo y demostración*.

Obtenida una raíz con la aproximación deseada, las restantes pueden obtenerse aplicando el mismo procedimiento.

Ahora bien, vamos a demostrar que una vez determinada una raíz ξ_k aproximada por exceso, el valor $\xi_k + \pi$ es, bajo ciertas condiciones, un número que se aproxima, también por exceso, al valor de la raíz subsiguiente ξ_{k+1} . En efecto, tenemos en general que

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh} x &= \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = (1-e^{-2x})(1-e^{-2x}+e^{-4x}-\dots) \\ &= 1-2e^{-2x}+2e^{-4x}-\dots \end{aligned}$$

Además

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x = 4e^{-2x} - 8e^{-4x} + \dots$$

Por lo tanto aplicando el teorema del valor medio se obtiene, cuando sea $2e^{-2x} < 1$, lo cual ocurre ciertamente si $x \geq \pi$,

$$\operatorname{tgh}(x+\delta) - \operatorname{tgh} x < \delta \cdot 4e^{-2x}$$

donde se indica con δ un número positivo cualquiera, es decir

$$\operatorname{tgh}(x+\delta) < \operatorname{tgh} x + 4\delta e^{-2x}.$$

Entonces, poniendo $\xi = \xi_k + \pi$ y aplicando esta desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \xi - \operatorname{tgh} \xi \\ = \operatorname{tg} \xi_k - \operatorname{tgh}(\xi_k + \pi) > \operatorname{tg} \xi_k - \operatorname{tgh} \xi_k - 4\pi e^{-2\xi_k} \end{aligned}$$

y, puesto que

$$\operatorname{tg} \xi_k - \operatorname{tgh} \xi_k = \frac{a}{\xi_k}$$

y

$$\xi_k > k\pi,$$

resulta

$$\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tgh} \xi > \frac{a}{\xi_k} - 4\pi e^{-2k\pi}$$

o sea

$$\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tgh} \xi > \frac{a}{\xi_k} - 4\pi \frac{1}{(464,2)^k}.$$

Se sigue que ξ será una aproximación por exceso de una nueva raíz, es decir, será

$$\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tgh} \xi > \frac{a}{\xi_k}$$

si se verifica

$$\frac{a}{\xi} = \frac{a}{\xi_k + \pi} \leq \frac{a}{\xi_k} - \frac{4\pi}{(464,2)^k}$$

o sea

$$a \geq \frac{4(\xi_k + \pi)\xi_k}{(464,2)^k};$$

y recordando que

$$\xi_k < \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

bastará que sea

$$a \geq \frac{(4k^2 + 8k + 3)\pi^2}{(464,2)^k},$$

que expresa la condición para que $\xi_k + \pi$ sea un valor aproximado por exceso de la raíz ξ_{k+1} .

Se nota que el segundo miembro de la desigualdad decrece muy rápidamente al crecer k ; así por ejemplo la desigualdad ya se verifica para $k \geq 1$ cuando $a \geq \frac{1}{3}$ y para $k \geq 2$ cuando

$$a \geq \frac{1}{600}.$$

En resumen podemos enunciar las siguientes conclusiones:

La ecuación propuesta tiene infinitas raíces, la primera de ellas contenida en el intervalo $0 - \frac{\pi}{2}$; las siguientes contenidas dentro de intervalos cada vez más reducidos cuyo extremo izquierdo es de la forma $k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{(464,2)^k}$ y el extremo derecho, a partir de una cierta raíz, se obtiene sumando π a la raíz precedente. Dentro de cada uno de estos intervalos se puede afinar la determinación de la raíz (única) por uno de los conocidos métodos: dicotómico, de partes proporcionales, de Newton, etc.

Evidentemente de lo dicho resulta que las raíces tienden a ∞ proporcionalmente a su orden k ; observando que entonces $\frac{a}{\xi_k} \rightarrow 0$ y $\operatorname{tgh} \xi_k \rightarrow 1$, escribiendo la ecuación dada en la forma $\operatorname{tg} \xi = \frac{a}{\xi} + \operatorname{tgh} \xi$ se sigue que las raíces tienden asintóticamente a $k\pi + \frac{\pi}{4}$.

Para la determinación de una primera aproximación de la solución contenida en el intervalo $0 - \frac{\pi}{2}$ se podrá observar que para $\xi < \frac{\pi}{2}$ valen los desarrollos en serie de potencias

$$\operatorname{tg} \xi = \xi + \frac{1}{3} \xi^3 + \frac{2}{15} \xi^5 + \frac{17}{315} \xi^7 + \dots$$

$$\operatorname{tgh} \xi = \xi - \frac{1}{3} \xi^3 + \frac{2}{15} \xi^5 - \frac{17}{315} \xi^7 + \dots$$

y reemplazando en la ecuación propuesta se obtiene

$$\frac{2}{3} \xi^4 + \frac{34}{315} \xi^8 + \dots = a$$

por lo tanto

$$\xi < \sqrt[4]{\frac{3}{2}} a$$

es decir que $\sqrt[4]{\frac{3}{2}} a$ es un valor aproximado por exceso de la primera raíz ⁽¹⁾.

Solución del Ing. PEDRO E. ZADUNAISKY, del Instituto de Matemática, Rosario.

N.º 68. — Resolver la ecuación de 6º grado

$$x^6 + 6ax^4 + 8bx^3 + 12cx^2 + \frac{6}{b}(a^2 - c)^2x - \frac{1}{b^2}[(a^2 - c)^3 - 8a^3b^2] = 0.$$

SOLUCIÓN. Efectuando la división indicada en el último sumando representamos la ecuación bajo la forma

$$x^6 + 6ax^4 + 8a^3 + 8bx^3 + 12cx^2 + \frac{6}{b}(a^2 - c)^2x = \frac{1}{b^2}(a^2 - c)^3.$$

Vemos que falta únicamente el término $12a^2x^2$ para que el conjunto de los tres primeros términos forme un cubo perfecto. Agregando y restando el término que falta vamos a tener

$$(x^2 + 2a)^3 + 8bx^3 + 12(c - a^2)x^2 + \frac{6}{b}(a^2 - c)^2x = \frac{1}{b^2}(a^2 - c)^3$$

o bien

$$(x^2 + 2a)^3 = -8bx^3 + 12(a^2 - c)x^2 - \frac{6}{b}(a^2 - c)^2x + \frac{1}{b^2}(a^2 - c)^3.$$

⁽¹⁾ En v. KARMAN, - BIOT, *Mathematical Methods in Engineering*, (Mc Graw-Hill, New York, London, 1940 - pág. 293) se encuentra una determinación de la primera raíz mediante un desarrollo en serie de potencias de a ; sin embargo no está discutida la convergencia de dicha serie.

Ocupémonos del segundo miembro que, después de sacar factor común $-b$, se convierte en

$$-b \left[8x^3 - 12 \frac{a^2-c}{b} x^2 + 6 \left(\frac{a^2-c}{b} \right)^2 x - \left(\frac{a^2-c}{b} \right)^3 \right]$$

y como entre los corchetes se halla un cubo perfecto, entonces será igual a

$$-b \left(2x - \frac{a^2-c}{b} \right)^3.$$

De suerte que la ecuación se representa así:

$$(x^2 + 2a)^3 = -b \left(2x - \frac{a^2-c}{b} \right)^3$$

o extrayendo la raíz cúbica

$$x^2 + 2a = -\sqrt[3]{b} \left(2x - \frac{a^2-c}{b} \right).$$

Hay que tener presente que en la relación obtenida la raíz cúbica de b puede tener tres valores:

$$\sqrt[3]{b}, \quad \omega \sqrt[3]{b}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{b},$$

siendo

$$\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt[3]{3}), \quad \omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt[3]{3}).$$

Concentrando ahora todos los términos en el primer miembro llegamos a la siguiente ecuación de segundo grado

$$x^2 + 2\sqrt[3]{b} \cdot x + \left(2a - \frac{a^2-c}{b} \sqrt[3]{b} \right) = 0,$$

cuya solución nos da

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,2} = -\sqrt[3]{b} \pm \sqrt{-2a + \frac{a^2-c}{b} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}} \\ x_{3,4} = -\omega \sqrt[3]{b} \pm \sqrt{-2a + \omega \frac{a^2-c}{b} \sqrt[3]{b} + \omega^2 \sqrt[3]{b^2}} \\ x_{5,6} = -\omega^2 \sqrt[3]{b} \pm \sqrt{-2a + \omega^2 \frac{a^2-c}{b} \sqrt[3]{b} + \omega \sqrt[3]{b^2}} \end{array} \right.$$

Esta solución, lo mismo que el enunciado del problema, es debida al Dr. SERGIO SISPÁNOV, de la Facultad de Ciencias de Asunción (Paraguay).

N.º 70. — Integrar la ecuación diferencial

$$y + y' \cdot \operatorname{sen} x + (1 + \cos x) \cdot \sqrt{1 - y'^2} = 0.$$

SOLUCIÓN. Derivando la ecuación propuesta se obtiene

$$\begin{aligned} y' + y'' \cdot \operatorname{sen} x + y' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \sqrt{1 - y'^2} - (1 + \cos x) \cdot \frac{y' y''}{\sqrt{1 - y'^2}} &= \\ = \left[\operatorname{sen} x - (1 + \cos x) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 - y'^2}} \right] \cdot y'' & \\ - \sqrt{1 - y'^2} \cdot \left[\operatorname{sen} x - (1 + \cos x) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 - y'^2}} \right] & \\ = \left[\operatorname{sen} x - (1 + \cos x) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 - y'^2}} \right] \cdot (y'' - \sqrt{1 - y'^2}) = 0. & \end{aligned}$$

Igualando a cero el segundo factor resulta

$$\frac{y''}{\sqrt{1 - y'^2}} = 1. \quad (1)$$

Análogamente, igualando a cero el primer factor vamos a tener

$$\frac{y'}{\sqrt{1 - y'^2}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad (2)$$

La integración de la ecuación (1) conduce a la fórmula

$$\text{arc sen } y' + c = x$$

o bien

$$y' = \text{sen } (x - c).$$

Sustituyendo en el primer miembro de la ecuación propuesta resulta

$$y + \text{sen } x \cdot \text{sen } (x - c) + (1 + \cos x) \cdot \cos (x - c) =$$

$$= y + \cos (x - c) + [\cos x \cdot \cos (x - c) + \text{sen } x \cdot \text{sen } (x - c)],$$

es decir,

$$y + \cos (x - c) + \cos c = 0,$$

lo que es la integral general.

Este resultado puede representarse en otra forma introduciendo una nueva constante D bajo las condiciones

$$\text{sen } c = D, \quad \cos c = \sqrt{1 - D^2}.$$

De esta manera la integral general

$$y + \cos c \cdot \cos x + \text{sen } c \cdot \text{sen } x + \cos c = 0,$$

se convierte en

$$y + D \text{sen } x + (1 + \cos x) \cdot \sqrt{1 - D^2} = 0.$$

Vemos, pues, que la integral general se deduce de la ecuación dada reemplazando en ella la derivada y' por una constante arbitraria D .

Pasando ahora a la relación (2) encontramos

$$y' = \text{sen } \frac{x}{2}.$$

Si se introduce esta expresión en la ecuación propuesta, resulta

$$y = -2 \cos \frac{x}{2},$$

lo que es la integral singular.

Enunciado y solución de este problema son debidos al Dr. SERGIO SISPÁNOV, de la Facultad de Ciencias de Asunción (Paraguay).

N.º 71. — Se conoce el perímetro de un triángulo y las longitudes de los segmentos que unen los vértices con los lados opuestos bajo un ángulo constante pero desconocido. Se pide construir el triángulo y determinar ese ángulo.

SOLUCIÓN. Sea ABC el triángulo y llamemos, como es costumbre, a, b, c a los lados opuestos respectivamente a los vértices A, B, C . Sean además S el área del triángulo y h_a, h_b, h_c las alturas. Se tiene $2S = ah_a = bh_b = ch_c$, de donde

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}. \quad (1)$$

Llamando k_a, k_b, k_c a los segmentos dados que unen respectivamente A, B, C con los lados opuestos bajo el ángulo constante φ , será

$$h_a = k_a \sin \varphi, \quad h_b = k_b \sin \varphi, \quad h_c = k_c \sin \varphi$$

y según (1),

$$\frac{a}{\frac{1}{k_a}} = \frac{b}{\frac{1}{k_b}} = \frac{c}{\frac{1}{k_c}}, \quad (2)$$

lo que significa que el triángulo buscado es semejante al triángulo cuyos lados son las inversas de los segmentos k_a, k_b, k_c . Como estos segmentos son datos, determinaremos primero gráfica-

mente sus inversas $\frac{1}{k_a}, \frac{1}{k_b}, \frac{1}{k_c}$ respecto de un segmento unidad arbitrario, y luego construiremos un triángulo semejante al que tiene por lados estas inversas y cumpla la condición de que su perímetro $2p$ sea el dado. Una vez construido el triángulo, la determinación gráfica del ángulo φ es inmediata. Si se desea calcular este ángulo analíticamente procederemos como sigue.

Escribiendo que las razones (2) son también iguales a la que se obtiene sumando los numeradores y los denominadores, resulta

$$\frac{a}{\frac{1}{k_a}} = \frac{b}{\frac{1}{k_b}} = \frac{c}{\frac{1}{k_c}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_c}},$$

de donde, poniendo $S_2 = k_a k_b + k_b k_c + k_c k_a$, $2p = a + b + c$,

$$a = \frac{2pk_b k_c}{S_2}, \quad b = \frac{2pk_a k_c}{S_2}, \quad c = \frac{2pk_a k_b}{S_2}.$$

Conocidos los lados a, b, c se conoce el área del triángulo por la fórmula $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ y entonces se calcula φ de la fórmula $2S = ah_a = ak_a \sin \varphi$,

$$\sin \varphi = \frac{SS_2}{pk_a k_b k_c}.$$

Para que el problema sea posible, deberán cumplirse las condiciones $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, o sea, reemplazando a, b, c por los valores antes obtenidos, resulta fácilmente que las condiciones de posibilidad son

$$k_b k_c + k_a k_c > k_a k_b, \quad k_b k_c + k_a k_b > k_a k_c, \quad k_a k_c + k_a k_b > k_b k_c.$$

Esta solución ha sido enviada por el Sr. ANGEL ULANOSKY, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario, quien acompaña la construcción gráfica correspondiente a lo explicado. Soluciones análogas han enviado los alumnos de la misma Facultad Sres. E. GRINSTEIN y MOISÉS GRILL y otra solución correspondiente al caso particular de suponer $\varphi = 90^\circ$ se ha recibido del Sr. MARIO RIBONE RUBÉN, también alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

N.º 72. -- De un triángulo se conoce el perímetro $2p$, la suma de las alturas h y el área S . Se pide determinar la ecuación de tercer grado cuyas raíces son los tres lados del triángulo.

SOLUCIÓN. Si a, b, c son los lados del triángulo y $x^3 + mx^2 + nx + s = 0$ la ecuación de tercer grado de la cual deben ser raíces, se sabe que deben tener lugar las relaciones

$$a + b + c = -m, \quad ab + bc + ac = n, \quad abc = -s. \quad (1)$$

Luego nuestro problema se reduce a encontrar los valores de las expresiones que figuran en (1) de los lados del triángulo en función de los datos. Desde luego tenemos

$$a + b + c = 2p \quad (2)$$

lo cual, según (1), nos dice que $m = -2p$.

Por otra parte, llamando h_a, h_b, h_c a las alturas, se tiene

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S$$

de donde

$$h = h_a + h_b + h_c = 2S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

o sea

$$\frac{ab + bc + ac}{abc} = \frac{h}{2S}. \quad (3)$$

Según la fórmula de Heron que da el área de un triángulo en función de los lados, se tiene

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

de donde, haciendo operaciones

$$p^3 - (a + b + c)p^2 + (ab + ac + bc)p - abc = \frac{S^2}{p}$$

y teniendo en cuenta (2) y (3) resulta

$$abc = \frac{2S(p^4 + S^2)}{p(hp - 2S)}. \quad (4)$$

Sustituyendo en (3) se tiene

$$ab + bc + ac = \frac{h(p^4 + S^2)}{p(hp - 2S)}. \quad (5)$$

Conocidos los tres primeros miembros de (1), se escribe inmediatamente la ecuación buscada que será

$$x^3 - 2px^2 + \frac{h(p^4 + S^2)}{p(hp - 2S)}x - \frac{2S(p^4 + S^2)}{p(hp - 2S)} = 0.$$

Esta solución es debida al Sr. MOISÉS GRILL, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de la Universidad del Litoral.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

81. Sea el cilindro elíptico representado en coordenadas cartesianas rectangulares por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se pide:

a) Determinar los dos planos que pasan por el origen y cortan al cilindro según circunferencias.

b) Determinar el volumen de los husos que dichos dos planos determinan en el cilindro.

82. Siendo

$$\operatorname{sen} \omega = \sqrt{\frac{4x}{15x+60}}, \quad y = \frac{\omega}{4+x},$$

determinar la constante a de manera que la expresión $x^2y - ax$ tienda a un límite finito cuando x tiende a infinito y determinar este límite.

83. Sea dada una elipse de semiejes a, b . Suponiendo que esta elipse gira manteniéndose tangente a una recta fija en un punto fijo de la misma, después de haber dado la vuelta completa, el centro de la elipse habrá descrito una curva cerrada. Hallar la ecuación de esta curva y demostrar que el área limitada por la misma vale $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.

84. Determinar un triángulo de lados enteros circunscrito al círculo de radio unidad.

85. Tres números enteros expresan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo; anteponiendo a cada uno la misma cifra, se obtienen nuevamente los lados de un triángulo rectángulo. Determinar estos tres números.

CUESTIONES

12. Ocho puntos elegidos arbitrariamente en un plano determinan en general un haz de cúbicas. Interesa particularmente el caso en que nunca más de tres se encuentran sobre una misma recta, ni más de seis sobre una cónica, en cuanto el haz no es degenerado. Se pide determinar la configuración que presenta el máximo número posible de ternas de puntos alineados y caracterizar el haz de cúbicas correspondiente.

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

—El precio de suscripción a « Mathematicae Notae » es de 8 \$ (m/n) anuales.

—El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc. », cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.

—Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a « Mathematicae Notae » dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).

—Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.

—Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

Vol. I.	m\$n.
1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	
1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
5 - I. Antecedentes de la ereación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	
1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.00
Vol. IV.	
1 - L. A. SANTALÓ — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00