Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario

Sistemas de Ecuaciones

4º Año

Cód. 1403-16

Betina Cattáneo
Mónica Napolitano

Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

SISTEMAS DE ECUACIONES

Trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales, que poseen cualquier cantidad de ecuaciones y de incógnitas.

Si indicamos con **m** la cantidad de ecuaciones y con **n** la cantidad de incógnitas, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, los llamamos **m x n**.

Así $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & E_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & E_m \end{cases}$$

- Los a_{ij} (números reales dados) se denominan coeficientes y los b_i (números reales dados) términos independientes.
- Los símbolos $x_1; x_2; \dots; x_n$ representan las incógnitas del sistema.

Observaciones:

- Un sistema m x n se llama **homogéneo** si todos sus términos independientes son nulos, en caso contrario los llamamos no homogéneos. Todo sistema homogéneo con n incógnitas, tiene al menos, la solución $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, llamada solución trivial o nula.

- Un sistema es **compatible** si tiene alguna solución, de lo contrario si carece de soluciones, es **incompatible**.

- Un sistema compatible puede tener una única solución, en cuyo caso se denomina **determinado** o infinitas soluciones; en este caso se llama **indeterminado**.

Clasificación de los sistemas según su solución

SISTEMA
- COMPATIBLE (tiene solución)
  - DETERMINADO (tiene única solución)
  - INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones)
- INCOMPATIBLE (no tiene solución)

A continuación trataremos de encontrar una estrategia que nos permita resolver un sistema m x n. Es decir, hallar el conjunto de todas sus soluciones.

<u>Resolución de un sistema m x n:</u>

Primeramente precisaremos algunos conceptos:

- *<u>Sistemas escalonados:</u> son aquellos en los cuales cada ecuación, a partir de la segunda, empieza, por lo menos, con un coeficiente nulo más que la anterior.*

Ejemplo: $$S\begin{cases} x - 3y + 2z = 10 \\ \quad 5y - 10z = -21 \\ \qquad\quad 2z = 4 \end{cases}$$

- *<u>Sistemas equivalentes:</u> son aquellos que tienen el mismo conjunto solución.*

¿Cómo sabemos que sustituimos un sistema por otro equivalente?

Lo podremos asegurar en tanto apliquemos operaciones elementales a las ecuaciones que conforman el sistema.

A saber:

- Intercambiar ecuaciones
- Multiplicar las ecuaciones del sistema por un número real no nulo.
- Sumar ecuaciones
    - Las últimas dos se pueden resumir: cambiar una ecuación por una combinación lineal de otras.

A partir de esto podemos generalizar ciertos procesos ya que a veces algunas modelizaciones de problemas (generalmente no matemáticos) necesitan de resoluciones de sistemas con muchas ecuaciones e incógnitas. Es muy importante entonces, disponer de un método de resolución automático de tales sistemas de cuya realización se puede encargar, por ejemplo, un ordenador. Un procedimiento que conduzca con seguridad, paso a paso, de los datos de un problema a su solución se llama **Algoritmo**. Lo que mostraremos a continuación es un algoritmo muy simple para resolver casi cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Utilizaremos el ***ALGORITMO DE GAUSS*** para escalonar y resolver el siguiente sistema***:***

$$(S)\ \begin{cases} x + 2y - z = -5 & (E_1) \\ 2x - y + 2z = 8 & (E_2) \\ 3x + 3y + 4z = 5 & (E_3) \end{cases}$$

Nota: Previamente debemos definir cómo se calcula un "determinante 2x2":

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\textit{Determinante } 2 \times 2$$

Lo que debemos hacer es armar una tabla usando los coeficientes y términos independientes del sistema

x	y	z	t.i.	
1	2	−1	−5	E_1
2	−1	2	8	E_2
3	3	4	5	E_3
	−5	4	18	E_2'
	−3	7	20	E_3'
		−23	−46	E_3''

El número -5 de la fila de E_2' se obtuvo del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 2 \times 2 = -5$.

El número 18 de la misma fila se obtuvo del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - (-5) \times 2 = 18$.

Y así vamos obteniendo los distintos números, para completar dicha fila hacemos: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-1) \times 2 = 4$

Para obtener los números de la fila E_3' se va a obtener resolviendo determinantes armados con los números de la fila E_1 y E_3. Siempre se usa la primer columna (la de *x*) y la otra columna corresponderá a la columna en la que esté ubicado el número.

Luego procedemos de igual manera con E_2' y E_3' quedándonos E_3''.

Para armar el sistema escalonado usamos E_1; E_2' y E_3''. Es decir, queda:

$$S''\begin{cases} x + 2y - z = -5 & (E_1) \\ \quad -5y + 4z = 18 & (E_2') \\ \qquad -23z = -46 & (E_3'') \end{cases} \quad \text{entonces } S = \{(1; -2; 2)\}$$

Siempre debes tener en cuenta que el número que se ubica en la primer fila y primer columna del cuadro debe ser distinto de cero. En caso de que esto no suceda, intercambia ecuaciones!

Ejemplos:

I. $S\begin{cases} 7y-17z=-21 \\ x-3y+7z=10 \\ 5x-y+z=8 \end{cases}$ *lo primero que debemos realizar es un intercambio entre la primera y segunda ecuación (ya que en la primera el coeficiente de x es cero). Así las cosas el sistema nos queda:* $S\begin{cases} x-3y+7z=10 \\ 7y-17z=-21 \\ 5x-y+z=8 \end{cases}$. *Ahora escalonamos con Gauss:*

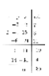
$$\longrightarrow \quad S\begin{cases} x-3y+7z=10 \\ 7y-17z=-21 \\ 0z=0 \end{cases}$$

analizando la última ecuación notamos que hay infinitas soluciones. Cualquier valor real z la cumple. Entonces hacemos $z=\lambda;\ \lambda\in R$*, con lo que* $y=-3+\frac{17}{7}\lambda$*, y luego* $x=1+\frac{2}{7}\lambda$.

Tendremos entonces, por un lado, un *<u>sistema compatible INDETERMINADO</u>**, y por otro su conjunto solución es:* $S=\left\{\left(1+\frac{2}{7}\lambda;-3+\frac{17}{7}\lambda;\lambda\right),\lambda\in R\right\}$

II. $S\begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 2x-y+15z=3 \\ x-8y-21z=11 \end{cases}$

$$\longrightarrow \quad S\begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 5y+19z=-19 \\ 0z=-35 \end{cases}$$



Analizando la última ecuación notamos que NO HAY SOLUCIÓN. Entonces estamos ante un *<u>sistema INCOMPATIBLE</u>**. Y su conjunto solución es* $S=\phi$

Práctica

1. Sin efectuar cálculos, indica una solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - t = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x + y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2a - 5b + 4c = -1 \\ 4a - 5b + 4c = 3 \\ 5a - 3c = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 6y + 5z = 0 \\ 6x - 9y + 10z = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ -2x - y + 5z = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$

3. Dado el sistema $\begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = 2a - 1 \end{cases}$, determina el valor de “a” para que:

i. sea incompatible
ii. sea compatible indeterminado
iii. tenga una solución en la que $x = 3$

4. Demuestra que el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=b_1 \\ 2x+5y+3z=b_2 \\ x+8z=b_3 \end{cases}$ es compatible determinado cualquiera sean b_1; b_2 y b_3.

5. Halla tres números sabiendo que, el primero es igual a dos veces el segundo mas la mitad del tercero; que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero el resultado es 5.

6. En cierto comercio, un cliente compra 5 kg de papas, 3 kg de azúcar y 2 kg de café, gastando un total de $37,50. Otro cliente compra 2 kg de papas, 2 kg de azúcar y 1 kg de café, gastando $19. Un tercer cliente compra 4 kg de azúcar y 5 kg de café gastando $52. halla el precio de cada artículo.

7. Tres amigos se pesan en una báscula de 2 a 2. Antonio y Benito suman 110 kg, Antonio y Carlos 120 kg, mientras que Benito y Carlos pesan 130 kg. ¿Cuántos pesa cada uno?

8. Los 90 alumnos de 3º año de un colegio están divididos en 3 grupos: A, B y C. Calcula el número de alumnos de cada grupo sabiendo que si se pasan 7 alumnos del grupo B al grupo A, ambos grupos tendrían el mismo número de alumnos o que si se pasan 4 alumnos del grupo C al grupo A, en el grupo A habría la mitad de alumnos que en el grupo C.

9. La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas, es igual a la suma de las decenas más el doble de las unidades. Si se permutan entre si las cifras de las centenas y la de las unidades, el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número.

10. Determine los valores de los coeficientes *a*, *b* y *c* tales que los puntos $(1;-1)$, $(-1;-5)$ y $(3;11)$ pertenezcan a la gráfica de $y=ax^2+bx+c$

11. Una compañía de bicicletas produce tres modelos de bicicletas: Dakar, Komodo y Córdoba. La fabricación de cada bicicleta consta de tres etapas: soldadura, pintura y ensamblaje. El tiempo que se dedica a cada etapa de fabricación se indica en la siguiente tabla. Durante una semana específica, la compañía dispone de un máximo de 133 horas para soldadura, 78 horas para pintura y 96 horas para ensamblaje. Determine cuántas bicicletas de cada tipo deben producirse esa semana para que la compañía opere a su máxima capacidad.

Etapa	Dakar	Komodo	Córdoba
Soldadura	2	3	4
Pintura	1	2	2,5
Ensamblaje	1,5	2	3

Respuestas

1. $(0;0;0;0)$

2.

a) $\{(1;-2;3)\}$

b) $\left\{\left(\frac{1}{7};\frac{13}{14};\frac{3}{2}\right)\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};2\right)\right\}$

d) $\left\{\left(\frac{3}{2}\alpha;\alpha;0\right);\ \alpha\in R\right\}$

e) $\{\ \}$

f) $\{(1;-2;3)\}$

g) $\left\{\left(-2;\frac{1}{5};-1\right)\right\}$

h) $\{(-2-2\lambda;3+\lambda;\lambda);\ \lambda\in R\}$

i) $\{\ \}$

j) $\{(-3\alpha;-\alpha;\alpha);\ \alpha\in R\}$

3.

i. $a=-1$ ii. a = 1 iii. $a=-\frac{4}{3}\ \vee\ a=1$

4. A cargo del alumno

5. $\frac{5}{2};\frac{1}{2}$ y 3

6. 1 kg de papas $\rightarrow$ \$2,5
1 kg de azúcar $\rightarrow$ \$3
1 kg de café $\rightarrow$ \$8

7. Antonio $\rightarrow$ 50 kg
Benito $\rightarrow$ 60 kg
Carlos $\rightarrow$ 70 kg

8. A $\rightarrow$ 16 alumnos
B $\rightarrow$ 30 alumnos
C $\rightarrow$ 44 alumnos

9. 421

10. $a=1$, $b=2$ y $c=-4$

11. Se podrán producir 28 Dakar, 15 Komodo y 8 Córdoba.