Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Fenómenos de ondas

5º Año

Cód. 7503-15

Prof. Liliana Grigioni
Prof. Alberto jardón
Prof. Silvia Vettorel

Dpto. de Física

Física

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

FENÓMENOS DE ONDAS

Introducción

En este capítulo se describieran y analizaran distintos fenómenos ondulatorios que se presentan con frecuencia en la naturaleza, la reflexión y la transmisión de ondas, los fenómenos de superposición de ondas y en particular la interferencia. También se analizarán las características de las ondas estacionarias en cuerdas y en tubos y su importancia en los instrumentos musicales.

Finalmente se presentará el efecto Doppler ampliamente usado en dispositivos tecnológicos de aplicación industrial y médico como los medidores de velocidad o los ecógrafos coronarios (ecodoppler)

Reflexión y transmisión de ondas

En el capítulo anterior, se consideró que las cuerdas eran extremadamente largas para no tener en cuenta los fenómenos que ocurren en los extremos. En este capítulo comenzaremos a analizar fenómenos que ocurren en los confines del medio de propagación, reconoceremos dos casos básicos:

a) Cuando la onda llega a un límite rígido que no le permite propagarse.
b) Cuando la onda llega a un medio distinto que le permite continuar la propagación aunque con modificaciones en la misma.

Para el primer caso hablaremos de ***reflexión*** ya que en ese punto la onda se refleja, en el segundo caso se trata de ***transmisión***.

Como modelo de reflexión consideremos un pulso que viaja sobre una cuerda fija a una pared en uno de sus extremos. Cuando el pulso alcanza la pared, se refleja y vuelve en dirección de la fuente pero invertido. Esto ocurre porque cuando el pulso llega al extremo fijo de la cuerda, ésta produce una fuerza hacia arriba sobre el soporte donde está fijada. De acuerdo con el principio de acción y reacción, el soporte ejerce una fuerza opuesta, es decir hacia abajo, en este caso, sobre la cuerda. Esta fuerza hacia abajo es la causa de que el pulso se invierta en la reflexión.

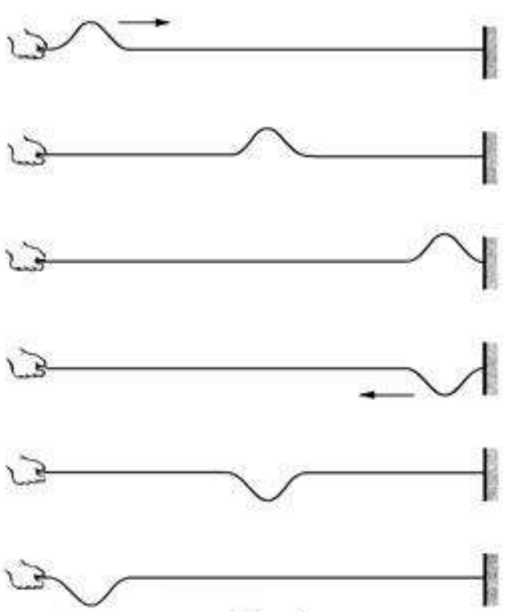


Fig. 1

El eco es el ejemplo clásico de reflexión de una onda, en este caso acústica.

Estamos frente a una situación diferente cuando hay transmisión, esto ocurre cuando la onda cambia de medio. Un ejemplo lo tenemos cuando una onda acústica que se propaga por el aire llega a una superficie de agua, parte de ella incide en el agua y continúa su propagación mientras otra parte se refleja. Esta situación la vamos a modelizar con dos cuerdas de características distintas unidas con continuidad.

En la figura 2 se encuentra el ejemplo de las dos cuerdas unidas, lo que distingue a una cuerda de la otra es su densidad. El comportamiento del sistema variará según la onda incidente se propague por la cuerda de mayor o menor masa por unidad de longitud.

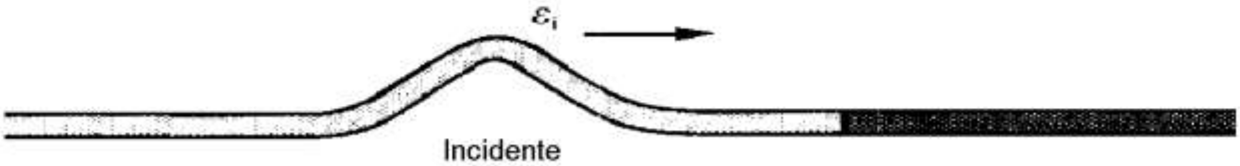


Fig. 2

Si la cuerda portadora del pulso incidente es menos densa, como se observa en el caso (a) de la figura 3, parte del pulso se transmite y parte se refleja pero la parte reflejada en la superficie límite se invierte, la onda reflejada está desfasada 180º con respecto a la onda incidente.

Si, por el contrario, la primera cuerda es más densa que la segunda, como se muestra en la figura 3(b), parte del pulso se transmite, parte se refleja sin invertirse.

Ejercicio

Una onda armónica se propaga por dos cuerdas unidas como se observa en la figura 3 caso a y b. Analiza:

a. Las velocidades de la onda incidente y de la transmitida.
b. La frecuencia de la onda incidente y la de la transmitida.
c. Las longitudes de onda de la onda incidente y de la transmitida.

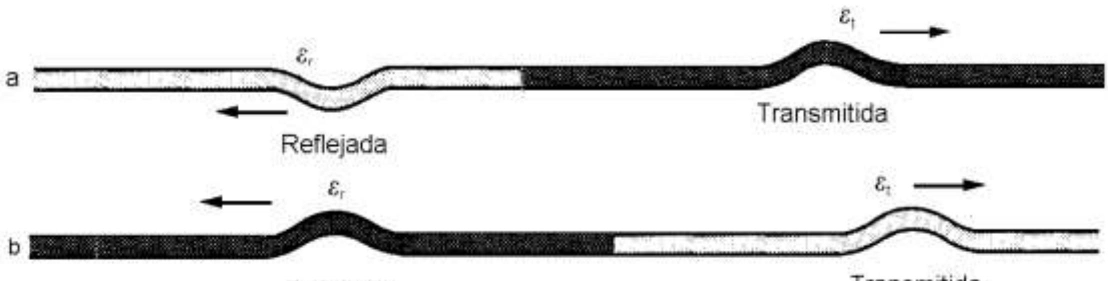


Fig.3

Superposición de ondas

Cuando dos ondas se encuentran en el espacio, sus perturbaciones individuales (representadas matemáticamente por sus funciones de onda) se superponen creando una nueva onda. Este fenómeno es propio de las ondas, no existe una situación análoga en el movimiento de las partículas, es decir, las partículas nunca se solapan.

Esto se resume en el **principio de superposición** del movimiento ondulatorio y se expresa así:

“Si en un medio actúan dos o más ondas la función general de onda resultante es la suma de las funciones de ondas individuales”.

Cuando en un medio se encuentran dos o más ondas la forma resultante de la superposición de esas ondas puede determinarse sumando los desplazamientos producidos por cada onda separadamente.

Un caso especial de superposición se presenta en una cuerda entre dos pulsos idénticos que se mueven en sentidos opuestos, excepto que uno está invertido respecto del otro, como representa la figura 3. En un instante determinado, cuando se encuentran, los pulsos se solapan y su suma es cero. En ese momento la cuerda está horizontal pero no en reposo, justo a la derecha de la región de solapamiento, la cuerda está moviéndose hacia arriba, mientras que a la izquierda lo hace hacia abajo, un instante después los pulsos emergen y siguen su camino

Otro caso es el que se observa en la figura 4 en la que los pulsos tienen el mismo signo y, cuando se encuentran, se suman sus amplitudes

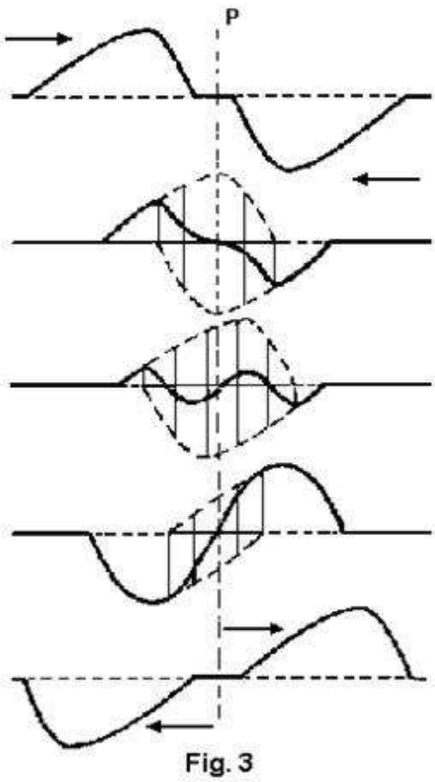


Fig. 3

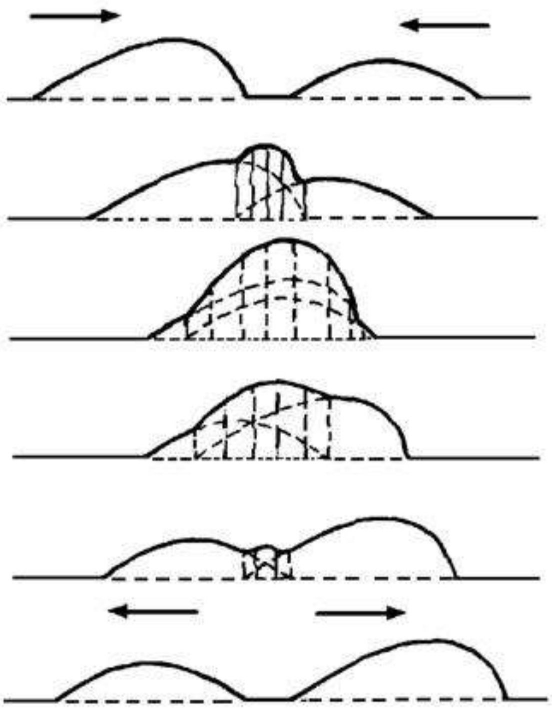


Fig. 4

Fig. 3: Superposición de dos ondas que viajan en sentido contrario como tienen signo opuesto la superposición es sustractiva

Fig. 4: Superposición de dos ondas que viajan en sentido contrario como tienen el mismo signo la superposición es aditiva

Interferencia

La superposición de ondas armónicas de igual frecuencia se llama **interferencia**. La interferencia, es un fenómeno ondulatorio importante, que nos permitirá explicar fenómenos en distintas áreas de la ciencia y tecnología como también en el campo de la música. El resultado de la interferencia de ondas armónicas depende de la diferencia de fase entre ellas. Veamos la onda que resulta de la superposición de dos ondas que se propagan en la misma dirección, tienen la misma frecuencia angular y longitud de onda pero que difieren en fase una cantidad φ como indica la figura.

La función ε_1 de una onda armónica que se propaga a la derecha con una frecuencia angular ω y un número de onda k con amplitud ε_{01} es:

$$\varepsilon_{1(x,\,t)} = \varepsilon_{01}\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t)$$

Para esta función de onda, tomamos t = 0 cuando el desplazamiento es nulo en x=0.

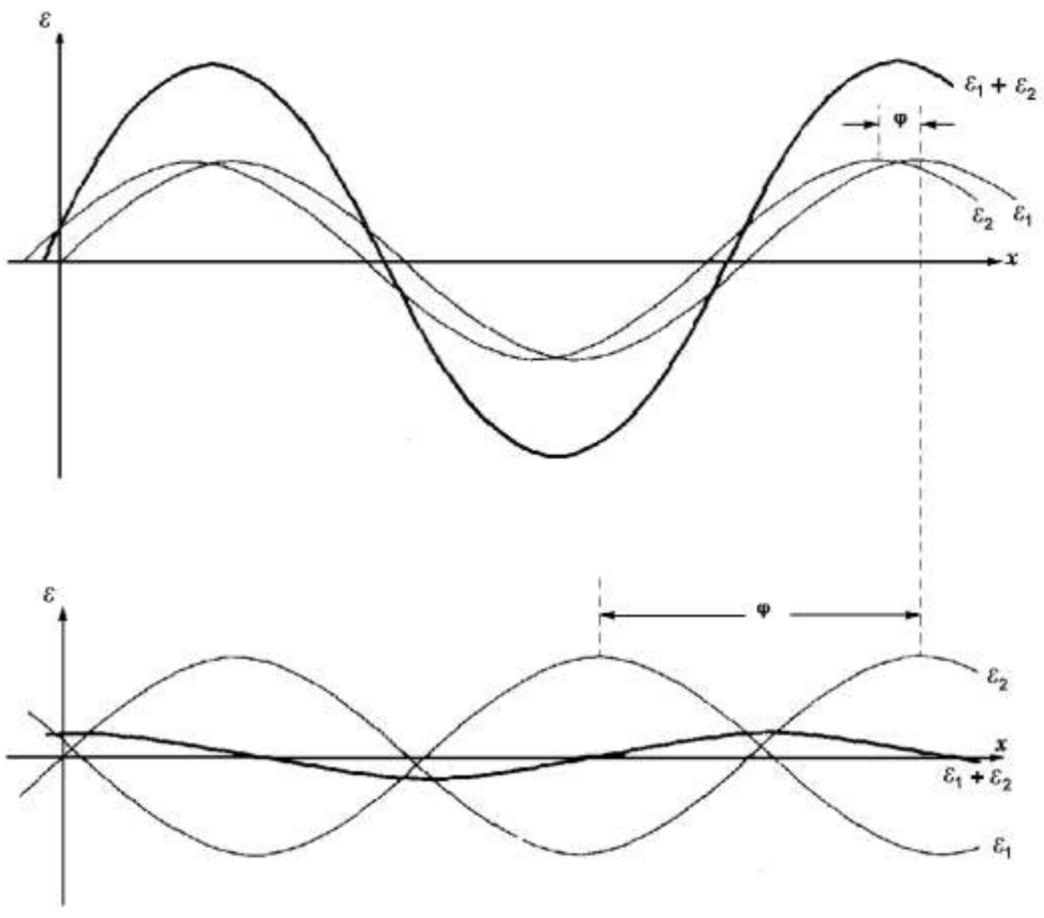


Fig.5

Fig. 5: Superposición de ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud, con un defasaje relativo φ

Para el movimiento de la segunda onda armónica como ya escogimos el instante correspondiente a t = 0, la ecuación general para esta función de onda es:

$$\varepsilon_{2(x,t)} = \varepsilon_{02} \operatorname{sen}(kx-\omega t+\varphi)$$

La onda resultante es la suma

$$\varepsilon_{1(x,t)} + \varepsilon_{2(x,t)} = \varepsilon_{01} \operatorname{sen}(kx-\omega t) + \varepsilon_{02} \operatorname{sen}(kx-\omega t+\varphi)$$

Si se cumple que $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = \varepsilon_0$

Esta ecuación puede simplificarse aplicando la siguiente identidad trigonométrica.

$$\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 2\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

En nuestro caso $\theta_1 = kx-\omega t$ y $\theta_2 = kx-\omega t + \varphi$ de modo que

$$\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{1}{2}\varphi$$

$$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = kx-\omega t + \varphi$$

Así la ecuación de la onda resultante toma la forma

$$\varepsilon_{1(x,t)} + \varepsilon_{2(x,t)} = \left(2\varepsilon_0 \cos\frac{1}{2}\varphi\right) \operatorname{sen}\left(kx-\omega t + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

donde se tuvo en cuenta que $\cos\frac{1}{2}\varphi = \cos\left(-\frac{1}{2}\varphi\right)$.

Analizando la ecuación resultante concluimos, que en general, la superposición de dos ondas armónicas da como resultado otra onda armónica del mismo número de onda y de la misma frecuencia. La onda difiere en fase de ambas ondas originales y su amplitud es

$$\left|2\varepsilon_0 \cos\frac{1}{2}\varphi\right|.$$

Si las dos ondas están en fase, la diferencia de fase es $\varphi = 0$, $\cos 0 = 1$ y la amplitud de la onda resultante es 2ε lo que da por resultado una **interferencia constructiva.** ¿Qué ocurrirá si $\varphi = \pi$ rad?

Ondas estacionarias en cuerdas

Si las ondas están confinadas en un medio con límites que sólo permiten la reflexión, aparece un tipo particular de ondas llamadas **ondas estacionarias**.

Este fenómeno se da con mucha frecuencia en la naturaleza y es muy común observarlo en dispositivos tecnológicos, los instrumentos musicales como las guitarras o los pianos que tienen cuerdas fijas en sus extremos y al vibrar producen ondas estacionarias.

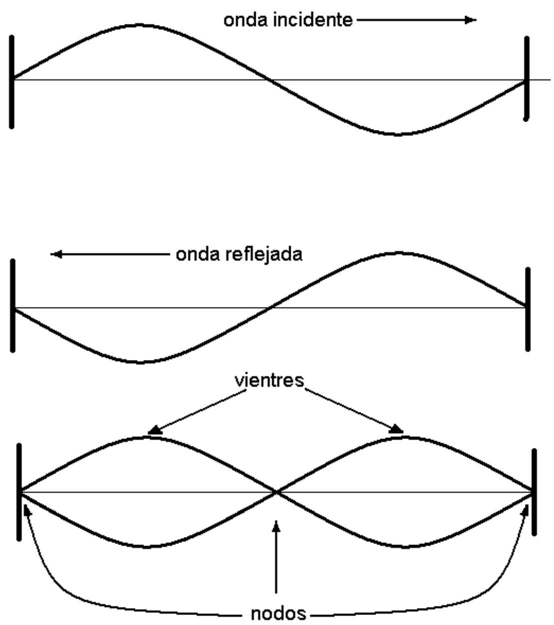


Fig. 6

Para ejemplificar las ondas estacionarias recurriremos a las cuerdas de una guitarra. Cuando se pulsa la cuerda se introduce una onda que se propaga hacia ambos extremos donde se reflejan invirtiendo su sentido, en la cuerda hay entonces ondas que van y que vuelven de manera que en todo momento existen ondas moviéndose en ambos sentidos superponiéndose. La onda estacionaria es el resultado de la interferencia de dos ondas de la misma amplitud y frecuencia que se propagan en la misma dirección pero en sentido contrario.

En la onda estacionaria existen puntos fijos (de allí el nombre de estacionaria), en los que el valor de la amplitud es siempre cero, a estos puntos se los llama **nodos.** Entre dos nodos consecutivos se encuentran los **vientres o antinodos,** estos son puntos de amplitud máxima. La distancia entre dos nodos o vientres consecutivos constituye media longitud de onda.

La energía no se transmite fuera del medio donde se desarrolla la onda estacionaria porque no puede pasar los extremos donde está limitada, puesto que sus fronteras están en reposo permanente. Esto hace que la cuerda se mantenga vibrando por mucho tiempo. En el caso de las cuerdas musicales la energía se va transmitiendo al aire en forma de sonido que es lo que interesa producir, si no fuese así no habría amortiguación y la cuerda permanecería vibrando de modo permanente.

Para determinar las características de las ondas estacionarias consideremos dos ondas que se propagan entre los extremos fijos de una cuerda de longitud L, una viajando a la derecha

$$\varepsilon_d = \varepsilon_0 \text{ sen } (kx - \omega\, t)$$

y la otra, de igual amplitud viajando a la izquierda

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \text{ sen } (kx + \omega\, t)$$

La onda resultan $\varepsilon_{(x,t)}$ será la suma de ambas $\varepsilon_{(x,t)} = \varepsilon_d + \varepsilon_i$

$$\varepsilon_{(x,t)} = \varepsilon_0 \text{ sen } (kx - \omega\, t) + \varepsilon_0 \text{ sen } (kx + \omega\, t)$$

$$\varepsilon_{(x,t)} = \varepsilon_0 \,[\text{sen } (kx - \omega\, t) + \text{sen } (kx + \omega\, t)]$$

Pero recordando las relaciones trigonométricas

$$\text{sen } (\alpha \pm \beta\,) = \text{sen } \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \text{ sen } \beta$$

Realizando los reemplazos $kx = \alpha$ y $\omega\, t = \beta$ y operando resulta

$$\varepsilon_{(x,t)} = 2\,\varepsilon_0 \text{ sen } kx \ \cos \omega t$$

Esta es la ecuación resultante de la superposición de dos ondas que viajan con sentidos opuestos. Sin embargo hay que considerar que la cuerda se encuentra limitada por los extremos. En este caso como los extremos de la cuerda están fijos la única amplitud posible es cero (nodo), a esto lo llamamos condiciones de contorno. Lo que significa que para un extremo de la cuerda (x = 0) el valor de la amplitud es $\varepsilon_{(0,t)} = 0$ y para el otro extremo (x = L) la misma amplitud $\varepsilon_{(L,t)} = 0$

Reemplazando esto en la ecuación obtenida, resulta

$$\varepsilon_{(0,t)} = 2\,\varepsilon_0 \text{ sen } k0 \ \cos \omega t = 0$$

que es nula ya que sen 0 = 0

En cambio el valor de la ecuación en el otro extremo es

$$\varepsilon_{(L,t)} = 2\,\varepsilon_0 \text{ sen } kL \ \cos \omega t = 0$$

sólo será cero en aquellos valores de L que cumplan con la condición

$$\text{sen } kL = 0$$

que se cumple para los valores de k L tales que

$$kL = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ ....$$

En general

$$kL = n\pi \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, ...$$

pero

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2} n$$

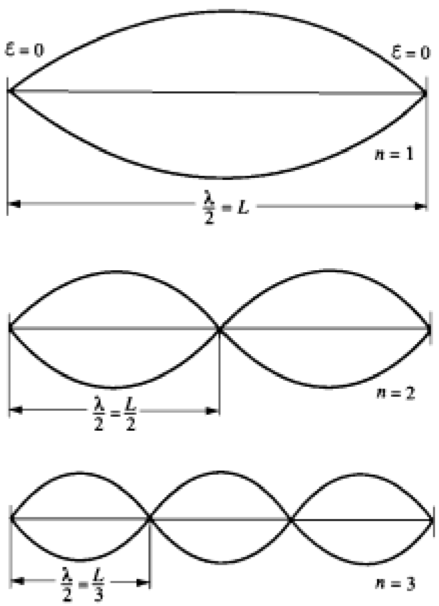


Fig. 7

En una cuerda de longitud determinada, hay muchas ondas estacionarias posibles. La única condición que deben satisfacer que los extremos de la cuerda permanezcan fijos, así debe haber un nodo en cada extremo, Las posibles longitudes de onda (λ) serán: $\lambda_1 = 2L$, $\lambda_2 = 2/2L$, $\lambda_3 = 2/3\ L$, etc.

Generalizando $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$ donde *n* es un número entero y *L* la longitud de la cuerda.

Las frecuencias de estas ondas son $f_n = \dfrac{v}{\lambda_n} = \dfrac{nv}{2L}$. Este conjunto incluye la frecuencia fundamental (cuando *n*=1) $f_1 = \dfrac{v}{2L}$ y todos los armónicos $f_n = nf_1$.

Como sabemos la velocidad de la onda en una cuerda está dada por $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$, entonces

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Con lo cual vemos que las frecuencias de las ondas estacionarias no dependen de la frecuencia de la fuente emisora como ocurre en las ondas viajeras, sino que dependen de ciertas características de la cuerda que son tensión, longitud y masa lineal.

La cuerda tiene, entonces, un número de patrones naturales de vibración, denominados *modos normales*, cada uno de los cuales tiene una frecuencia característica. La frecuencia más baja, correspondiente a *n*=1, es la *frecuencia fundamental* $f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$.

Los modos normales restantes, llamados a veces sobretonos, son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Estas frecuencias naturales más altas, junto con la frecuencia fundamental, forman una ***serie armónica***. La frecuencia fundamental es el primer armónico, la de frecuencia igual al doble de la fundamental es el segundo armónico y así sucesivamente.

Cada nota de la escala musical corresponde a determinada frecuencia. Cuando se toca una nota en un instrumento, su frecuencia asignada es la de la primera armónica, la frecuencia fundamental. Esta frecuencia es dominante sobre los sobretonos acompañantes. La primera armónica corresponde a la frecuencia más baja que se puede obtener y los sobretonos tienen frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Los sobretonos son los que determinan la calidad (timbre) del sonido del instrumento. Recordemos que el timbre está determinado por la forma de la onda, la cual depende de la diferente proporción con que intervienen los armónicos superiores.

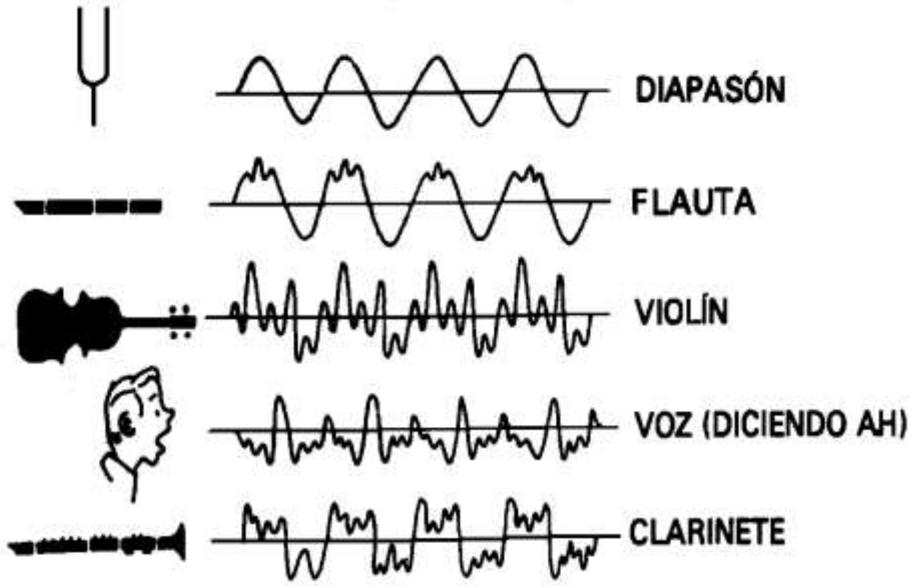


Fig. 8 Formas de las ondas correspondientes a distintos instrumentos

Cuando una cuerda tensada se distorsiona de manera tal que la forma de la distorsión corresponde a cualquiera de sus armónicos, después de soltarse vibra a la frecuencia de ese armónico. Pero, si la cuerda se golpea o pulsa de modo tal que su forma distorsionada no sea igual a un solo armónico, la vibración resultante incluirá frecuencias de diversos armónicos. La figura 9 muestra una cuerda tensada vibrando en su primer armónico o frecuencia fundamental y varios armónicos sucesivos. La ondulación más larga corresponde a la frecuencia fundamental de vibración y las ondulaciones más pequeñas al segundo armónico. En general, el movimiento o desplazamiento resultante puede describirse por medio de la superposición de las diversas funciones de onda armónicas, con diferentes frecuencias y amplitudes. Por consiguiente, el sonido que uno escucha corresponde a una onda compleja asociada a estos diversos modos de vibración.

En un instrumento de cuerda, la tensión de cada cuerda se ajusta para afinarla a una frecuencia determinada, la fundamental correspondiente a la nota de esa cuerda.

La frecuencia de cada cuerda se puede variar cambiando la tensión de la cuerda al hacer girar las clavijas en el clavijero del instrumento. Cuanto mayor es la tensión de la cuerda, mayores son sus frecuencias de vibración y más aguda será la nota emitida.

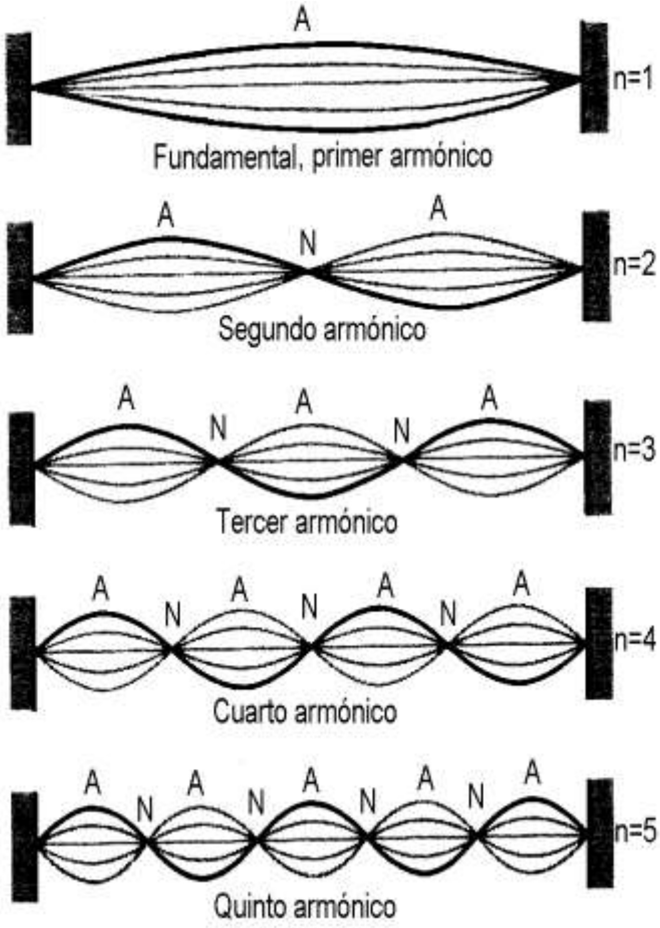


Fig. 9 Exposiciones de una cuerda que vibra en su primer armónico y las sucesivas armónicas.

También se puede cambiar la frecuencia de vibración de una cuerda variando su longitud. La longitud de la cuerda se hace variar mediante la presión de los dedos, con esto se varía uno de los extremos fijos de la cuerda y en consecuencia su longitud efectiva, con lo cual la cuerda vibra a otra frecuencia y suena entonces otra nota musical. Cuando se acorta la longitud de la cuerda, la frecuencia aumenta y, entonces, suena con una nota más aguda.

La cuerda de un instrumento puede ser punteada o rasgada, con lo cual la misma nota suena diferente, nuestro oído puede discernir la calidad de estas notas idénticas. El timbre se puede variar modificando las condiciones de excitación, por ejemplo, en una guitarra punteando o rasgando la cuerda, en un violín con la posición y la forma de llevar el arco.

Problema 1 La cuerda Do media de la escala en Do mayor en un piano tiene una frecuencia fundamental de 264 Hz, y la nota La tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz.

a) Calcula las frecuencias de los siguientes dos armónicos de la cuerda Do.
b) Si se supone que las cuerdas para las notas La y Do tienen la misma masa por unidad de longitud y la misma longitud, determina la proporción de las tensiones en las dos cuerdas.
c) En un piano real, la suposición que hicimos en la parte b) sólo es parcialmente cierta. Las densidades de las cuerdas son iguales pero la cuerda La es 64% más larga que la cuerda Do. ¿Cuál es la proporción de sus tensiones?

Ondas estacionarias en tubos

Al igual que una cuerda fija por ambos extremos, el aire dentro de una cavidad sólo puede vibrar a distintas frecuencias que son características de la cavidad.

En una cavidad sólo pueden existir ondas estacionarias de ciertas longitudes de onda y frecuencias, las que dependen del tamaño y la forma de la cavidad, pero sólo son fáciles de calcular las de cavidades de geometría muy simple como por ejemplo un tubo largo y estrecho. En algunos instrumentos, una lengüeta en vibración o el labio en vibración del músico ayuda a establecer vibraciones de la columna de aire.

Un caso especialmente importante es el de una cavidad cilíndrica que puede estar abierta por ambos extremos (tubo abierto) como por ejemplo una flauta o con un extremo cerrado y el otro abierto (tubo cerrado) como un clarinete. Soplando aire por uno de los extremos del cilindro se producen ondas que se propagan por el cilindro. Si el diámetro del cilindro es pequeño comparado con la longitud de onda de las ondas, éstas se reflejan en el otro extremo del cilindro y vuelven hacia atrás. La superposición de ondas de idéntica amplitud y frecuencia, que se propagan en sentidos opuestos, produce una configuración de ondas estacionarias.

La relación de fase entre la onda incidente y la onda reflejada en un extremo depende de que el tubo sea abierto o cerrado en ese extremo, de forma análoga a las relaciones de fase entre ondas transversales incidentes y reflejadas en los extremos de una cuerda.

El ***extremo cerrado*** de una columna de aire es un ***nodo de desplazamiento*** debido a que la pared en este extremo no permite el movimiento molecular. En un extremo cerrado de un tubo de aire la onda reflejada está a 180º fuera de fase respecto de la onda incidente. Además, como ya vimos, la onda de presión está a 90º fuera de fase respecto de la onda de desplazamiento. Entonces, el extremo cerrado de una columna de aire también corresponde a un ***antinodo de presión*** (punto de máxima variación de presión).

El ***extremo abierto*** de una columna de aire es aproximadamente un ***antinodo de desplazamiento*** y un ***nodo de presión***. La presión en cada extremo está fijada por la presión atmosférica, puesto que los extremos están abiertos a la atmósfera. La onda reflejada en un extremo abierto está en fase con la onda incidente si el diámetro del tubo es relativamente pequeño respecto de la longitud de onda de las ondas.

Entonces, en un tubo abierto, de longitud *L*, sólo podrá haber ondas estacionarias que tengan nodos de presión en ambos extremos, situación idéntica a la de una cuerda fija por ambos extremos.

Solamente son posibles las ondas estacionarias que tienen longitudes de onda dadas por $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, en donde *n* es un número entero y *L*, como ya vimos, es la longitud del tubo.

Las frecuencias de estas ondas son $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}$, donde v es la velocidad del sonido en el aire

Este conjunto incluye la frecuencia fundamental $f_1 = \frac{v}{2L}$ y todos sus armónicos $f_n = nf_1$.

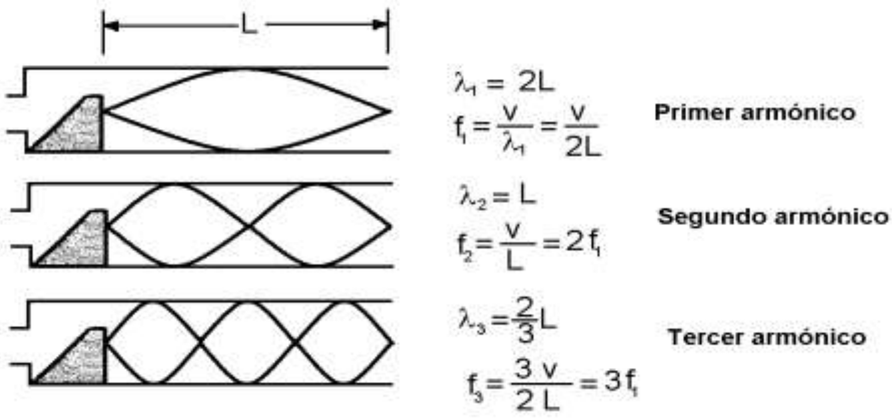


Fig. 10 Ondas estacionarias, en un tubo de órgano abierto. Se indican los primeros armónicos (Representación de la onda de presión)

Los tres primeros modos normales de vibración de un tubo abierto en ambos extremos se muestran en la figura 10. Cuando el aire se dirige contra un borde, se forman ondas longitudinales y el tubo resuena en sus frecuencias naturales formando una serie armónica f_1, 2 f_1, 3 f_1,….

Un tubo cerrado tiene un antinodo de presión en el extremo cerrado. Entonces, las ondas estacionarias características tienen un nodo de presión en el extremo abierto y un antinodo de presión en el extremo cerrado. La figura 11 muestra las tres primeras ondas estacionarias que cumplen con esta condición.

Estas ondas tienen 1/4, 3/4 y 5/4 de longitud de onda en el tubo, es decir que $L = m\frac{\lambda_m}{4}$, en donde *m* es un número entero impar (m = 1, 3, 5, 7, ………). Entonces $\lambda_m = \frac{4L}{m}$. Las frecuencias características son $f_m = \frac{mv}{4L}$.

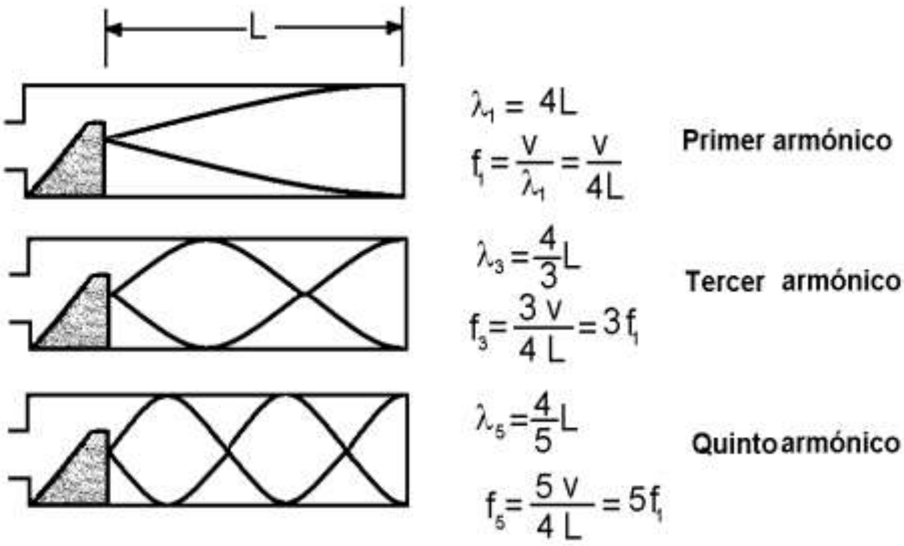


Fig. 11 Ondas estacionarias, en un tubo de órgano cerrado. Se indican los primeros armónicos (Representación de la onda de presión)

En este caso, la longitud de onda para el modo fundamental es cuatro veces la longitud del tubo ($\lambda_1 = 4L$).

La frecuencia fundamental es $f_1 = \frac{v}{4L}$, que es la mitad de la frecuencia fundamental en un tubo abierto de la misma longitud.

Los sobretonos (o armónicos) del tubo cerrado están compuestos solamente de los armónicos impares f_1, 3 f_1, 5 f_1, ……

Problema 2

Si un tubo tiene una longitud de 1,23 m

a) Determina las frecuencias de los primeros tres armónicos si el tubo está abierto en cada extremo. Considera v= 343 m/s como la velocidad del sonido en el aire.
b) ¿Cuáles son las tres frecuencias si el tubo está cerrado en un extremo?
c) Para el tubo abierto en ambos extremos, ¿cuántos armónicos están presentes en el intervalo normal de audición humana?

En los instrumentos de viento se producen vibraciones estacionarias de una columna de aire y éstas generan ondas sonoras en el medio ambiente.

Los tubos de órganos y otros instrumentos de viento, incluyendo la voz humana, producen tonos estableciendo ondas estacionarias en cavidades.

De acuerdo con las fórmulas $f = \frac{v}{2L}$ para tubo abierto y $f = \frac{v}{4L}$ para tubo cerrado, que relacionan la longitud de la columna de aire con la frecuencia de la onda sonora, el único parámetro que fija el tono de un sonido es la longitud de esta columna de aire, pues la velocidad depende únicamente de la temperatura. La única forma de modificar la frecuencia en un instrumento de viento es variar la longitud de la columna de aire vibrante. Para afinar un instrumento de viento es necesario modificar ligeramente la longitud de los tubos.

En los órganos hay tubos “abiertos” y “tapados” (cerrados) por la parte superior. Teniendo en cuenta las fórmulas que vinculan las frecuencias con la longitud de los tubos, vemos que la frecuencia fundamental de un tubo cerrado es la mitad de la frecuencia fundamental de un tubo abierto, por lo tanto un tubo tapado suena una octava más baja que uno abierto de la misma longitud.

Como las longitudes asociadas a las frecuencias bajas son muy grandes, los instrumentos de viento de tonos graves, por ejemplo la tuba, tienen grandes dimensiones.

En otros instrumentos de viento de madera, como por ejemplo la flauta dulce, el aliento humano se utiliza para crear las ondas estacionarias en un tubo abierto. La mayor parte de dichos instrumentos permite al ejecutante variar la longitud efectiva del tubo y, por lo tanto el tono producido, abriendo o cerrando los orificios del tubo.

Pulsaciones o batidos

Un fenómeno típico, consecuencia del principio de superposición, es el fenómeno de pulsaciones o batidos. Ocurre cuando se superponen dos ondas sonoras con *frecuencias ligeramente diferentes.* Cuando estas dos ondas se observan en un punto dado están periódicamente en y fuera de fase.

Como las dos ondas no pueden permanecer en fase, pues tienen frecuencias ligeramente diferentes, en forma gradual y periódica entran y salen de fase. Cuando están en fase, o casi, las crestas coinciden con las crestas, los valles con los valles y la onda resultante es grande. Cuando están a 180º fuera de fase, o casi, una sube mientras la otra baja y la resultante es pequeña o inexistente.

Supongamos dos ondas senoidales de igual amplitud ε_0 que viajan por un medio en el mismo sentido y cuyas frecuencias f_1 y f_2 son ligeramente diferentes.

Podemos representar el desplazamiento que cada onda produce en un punto como

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cos 2\pi f_1 t \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cos 2\pi f_2 t$$

Ahora veamos qué ocurre con la onda resultante en un punto dado a lo largo del tiempo. Utilizando el principio de superposición, encontramos que el desplazamiento resultante en un punto es

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t\right)$$

Es conveniente escribir esta ecuación en una forma que incluya la identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Al considerar $a = 2\pi f_1 t$ y $b = 2\pi f_2 t$, encontramos que

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

La figura 12 de la página siguiente presenta las gráficas que muestran las ondas individuales así como la onda resultante

Vemos que en t_0= 0 las ondas individuales se encuentran en fase, en t_1 se encuentran desfasadas 180º, en un instante posterior t_2 vuelven a estar en fase, en t_3 nuevamente desfasadas y así sucesivamente.

La onda resultante en cualquier punto tiene una frecuencia efectiva igual a la frecuencia promedio $f_{prom} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$, y una amplitud A dada por

$$A = 2\varepsilon_0 \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t$$

Esta última expresión nos indica que la amplitud no es constante sino que varía con el tiempo, y la frecuencia a la cual se escuchan los máximos de amplitud (A= $2\varepsilon_0$) es $\frac{f_1 - f_2}{2}$.

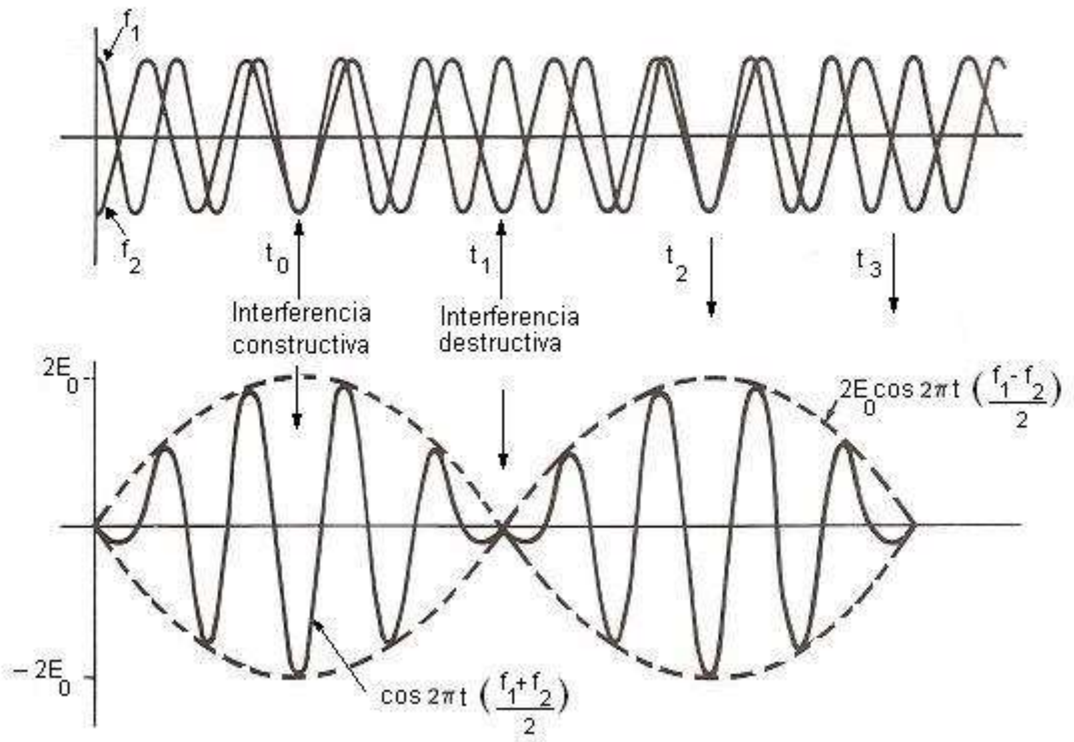


Fig. 12

Como f_1 es muy próxima a f_2, resulta $\frac{f_1 - f_2}{2}$ una frecuencia pequeña, por lo tanto, la variación de amplitud es lenta, según lo muestra la envolvente (línea punteada) de la onda resultante en la figura 12.

Una ***pulsación***, o un ***máximo en amplitud***, se detecta siempre que

$$\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = \pm 1$$

Esto significa que hay dos máximos en cada ciclo, es decir dos pulsos por ciclo, de modo que la frecuencia de los pulsos es dos veces $\frac{f_1 - f_2}{2}$ que es justamente

$$f_b = |f_1 - f_2|$$

Podemos concluir que:

La onda resultante es de amplitud modulada de modo que aumenta o disminuye con la frecuencia de pulsación.

Como las frecuencias de las ondas individuales son relativamente altas, la frecuencia efectiva o promedio de la onda resultante también lo es y la frecuencia de pulsación es baja.

Cuando dos diapasones, cuyas frecuencias sólo difieren ligeramente, se golpean de manera simultánea, se produce un sonido que fluctúa en intensidad, alternando entre dos tonos fuertes y silencio. Dichas fluctuaciones regulares se denominan ***pulsaciones***.

Como la intensidad es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud, el sonido será más fuerte siempre que la amplitud sea máxima.

Si un diapasón vibra con una frecuencia de 241Hz y otro con 243Hz, la onda sonora resultante de la combinación tiene una frecuencia de 242Hz y una frecuencia de pulsación de 2Hz. Una persona oirá un tono pulsante con frecuencia media de 242Hz que tendrá una intensidad máxima dos veces por segundo. (La frecuencia de cada máximo en la onda resultante será de 1Hz).

El oído humano puede detectar hasta 15 o 20 pulsaciones por segundo. Cuando la frecuencia de pulsación excede este valor, las fluctuaciones de la intensidad son demasiado rápidas para ser oídas.

El fenómeno descrito permite comparar una frecuencia desconocida con otra conocida, cuando se utiliza un diapasón para afinar algún instrumento de cuerda, por ejemplo un piano. Se hace sonar al mismo tiempo el diapasón y la nota del piano, la cuerda se ajusta hasta que las pulsaciones desaparecen o son mínimas, lo que indica que la diferencia en frecuencia entre los dos generadores de sonido es muy pequeña.

Problema 3

Cuando se golpea un diapasón de 440Hz al mismo tiempo que se pulsa la cuerda de una guitarra que debe dar cierta nota musical, se escuchan 3 pulsaciones por segundo. Después que la cuerda se tensa un poco más para aumentar su frecuencia, las pulsaciones aumentan a 6 por segundo. ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda a la tensión final?

Como inicialmente se oían 3 pulsaciones por segundo, la frecuencia original de la cuerda debía ser de 443Hz o 437Hz.

Si hubiese sido 437Hz, al aumentar ligeramente la frecuencia de la cuerda, hubiese disminuido la frecuencia de batido, ya que la frecuencia de la cuerda hubiese sido más próxima a la del diapasón.

Como la frecuencia de batido no disminuyó sino que aumentó a 6 pulsaciones por segundo, la frecuencia original tenía que haber sido 443Hz y la nueva frecuencia es 446 Hz.

Para afinar la cuerda a 440Hz se debería haber disminuido ligeramente la tensión de la cuerda para reducir su frecuencia.

Efecto Doppler

Todas las ondas se muevan a través de un medio homogéneo con una velocidad constante qué solo depende de las propiedades físicas del medio. Esto se cumple independientemente de que la fuente se mueva o esté en reposo. Sin embargo, el tono con que percibimos el sonido se modifica si la fuente de las ondas o el observador (nosotros) se mueven uno respecto del otro. Un ejemplo de este cambio se da cuando escuchamos la bocina de un auto que suena cuando pasa delante nuestro, ésta se escucha con un tono más alto cuando el vehículo se acerca a nosotros y más bajo cuando se aleja. Como sabemos la frecuencia de la onda emitida por una fuente, depende de la fuente, por lo tanto el cambio de frecuencia percibido por el observador es solo ***aparente***. Este cambio de frecuencia aparente se denomina **efecto Doppler** (Christian Johann Doppler, (1803-1853) físico austriaco, quien fue el primero en sugerir que el cambio de frecuencia observado en las ondas sonoras podía también aplicarse a las ondas de luz).

En general el efecto Doppler ocurre siempre que haya un movimiento relativo entre la fuente y el observador, provocando que la frecuencia percibida sea diferente de la emitida por la fuente, en el caso que el movimiento sea de acercamiento, la frecuencia aumenta (más agudo) y en el caso de alejamiento la frecuencia disminuye (más grave).

Este efecto es común experimentarlo con el sonido, pero es propio de todas las ondas armónicas. Por ejemplo este efecto se utiliza en los sistemas de radar usados para medir la velocidad de los vehículos, para determinar el movimiento de las estrellas, galaxias y otros cuerpos celestes, etc.

Para analizar este efecto, consideremos primeramente el caso donde el observador O se mueve hacia la fuente S que está en reposo (por simplicidad, consideraremos que el aire está en reposo). Supongamos el observador O caminando hacia la fuente con una velocidad v_0, la cual al estar en reposo $v_s = 0$. La fuente emite una onda de frecuencia f, longitud λ y velocidad del sonido v. Si el observador estuviera en reposo la llegarían claramente f números de frentes de onda por segundo (pues $v_0 = 0$ y $v_s = 0$). Cuando el observador se mueva hacia la fuente la velocidad de las ondas respecto del observador es:

$v' = v + v_0$, sin embargo λ no cambia pues el medio no cambia por consiguiente si

$v = f.\lambda$, luego $f = \frac{v}{\lambda}$; y la frecuencia aparente

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v+v_0}{\lambda} = \frac{v}{\lambda} + \frac{v_0}{\lambda} = f + \frac{v_0}{\lambda} = f\left(1+\frac{v_0}{f\lambda}\right) = f\left(1+\frac{v_0}{v}\right)$$

Como $(1+\frac{v_0}{v}) \geq 1$ significa que el observador escuchará con una frecuencia mayor al sonido emitido por la fuente.

Si el observador se alejara de la fuente v’ = v - v_0 $\therefore$ f’ = f(1 - $\frac{v_0}{v}$) en este caso la frecuencia es menor que la emitida y el observador percibirá el sonido más grave.

Podemos concluir que cuando un observador se mueve y la fuente de sonido permanece en reposo , la frecuencia aparente percibida es:

$$\boxed{f' = f\left(1 \pm \frac{v_0}{v}\right)}$$

El signo positivo corresponde al observador que se acerca y el negativo al que se aleja.

Consideremos la situación en que el observador permanece en reposo y la fuente se mueve con la velocidad v hacia el observador ubicado en un punto A indicado en la figura 13

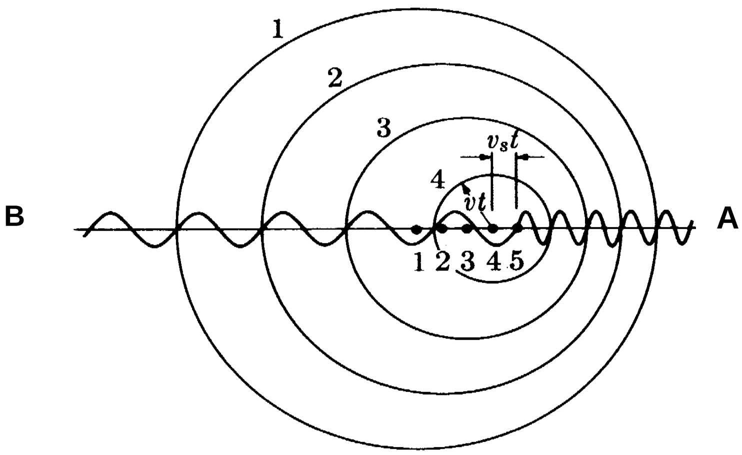


Fig.13 El sonido emitido por una fuente en movimiento viaja una distancia *d* en un tiempo *t*. Durante ese tiempo, la fuente viaja una distancia v_sT, acortándose así la longitud de onda recibida por el observador A.

Si la fuente se mueve hacia A los frentes de onda vistos por el observador A están más próximos entre si como consecuencia del movimiento de la fuente en dirección de la onda emitida. Como resultado al observador A le llegan longitudes de onda λ' menores que las longitudes de onda λ emitidas por la fuente.

Durante cada vibración que dura un tiempo T, la fuente se mueve v_sT = $\frac{v_s}{f}$ = $\Delta\lambda$ (cantidad que se acorta la longitud de onda), por lo tanto la longitud de onda observada $\lambda' = \lambda - \Delta\lambda$. Como $\lambda = \frac{v}{f}$,

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - \Delta\lambda} = \frac{v}{\lambda - \frac{v_s}{f}} = \frac{v}{\frac{v}{f} - \frac{v_s}{f}} = f\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$$

$$f' = f\left(\frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}}\right)$$

la frecuencia del sonido recibido por el observador A se incrementa respecto del emitido por la fuente pues $\frac{1}{1-\frac{v_s}{v}} \geq 1$.

De manera similar podemos plantear que la fuente se aleje del observador, como se observa en la figura en el caso del observador B, aquí $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ entonces,

$$f' = f\left(\frac{1}{1 + \frac{v_s}{v}}\right)$$

Si relacionamos los dos casos: $$f' = f\left(\frac{1}{1 \pm \frac{v_s}{v}}\right)$$

Si se mueven tanto el observador como la fuente tenemos:

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s}\right),$$

Los signos + y - se refieren al acercamiento de la fuente y el observador y los -+ al alejamiento mutuo.

Debemos recordar que cuando se hace referencia al efecto Doppler, la palabra acercándose significa aumento de frecuencia y alejándose disminución de frecuencia.

Problema 4

Un camión que viaja a 96km/h se aproxima y pasa frente a una persona de pie, en la carretera el conductor hace sonar la bocina. Si la bocina tiene una frecuencia de 400Hz, ¿cuáles son las frecuencias de las ondas sonoras que escucha la persona a) al aproximarse el camión, y b) después que ha pasado?

El efecto Doppler, la policía y la trombosis

Cuando se emiten ondas de un transmisor estacionario, y esas ondas se reflejan en un objeto en movimiento, ese objeto hace la función de otra fuente de ondas. El desplazamiento Doppler que se produce (que por lo general se logra haciendo chocar la onda que regresa con la señal que tiene la frecuencia original) permite conocer la velocidad del objeto. La policía hace este truco con microondas, para cronometrar la velocidad de los vehículos, se usa el mismo método para rastrear satélites y condiciones meteorológicas peligrosas como los tornados.
En igual forma, las ondas ultrasónicas desplazadas por efecto Doppler, de 8MHz, se usan para vigilar el flujo de sangre y auxiliar en el diagnóstico de malestares, como trombosis en venas profundas.

Problemas de aplicación.

1- La densidad lineal de una cuerda vibrante es de $1{,}3.10^{-4}$ kg/m. Una onda transversal cuya ecuación es y = 0,021sen(x+30t) se propaga por dicha cuerda, donde x e y se miden en m y t en segundos. a)Cuál es la tensión de la cuerda?. b) Si esta cuerda es atada a otra cuya densidad de masa es 2.10^{-4} kg/m con la misma tensión anterior y la misma fuente de onda, ¿cuál será la frecuencia y la longitud de onda de la onda que se propaga en cada cuerda? *R: a) 0,117N; b) 30/2π, λ_1= 2 π m, λ_2 = 5,06m*

2-Dos ondas armónicas se describen por medio de:

$$y_1 = 5 \text{ sen } \left[\pi(4x - 1200t)\right]$$
$$y_2 = 5 \text{ sen } \left[\pi(4x - 1200t - 0{,}25)\right]$$

Donde x, y_1 e y_2 se miden en metros, y t en segundos. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante? b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda resultante? *R a) 9,24m; b) 600Hz*

3-Dos ondas armónicas se describen por medio de:

$$\varepsilon_1 = 6 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0{,}005}t\right)$$
$$\varepsilon_2 = 6 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0{,}005}t - \varphi\right)$$

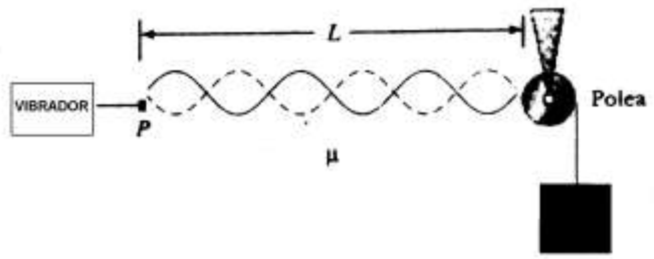
Donde x, ε_1, ε_2 se miden en m y t en s. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante cuando $\varphi = \pi/6$? b) ¿Para que valores de φ la amplitud de la onda resultante tendrá su valor máximo? *R: a) 11,6m; b) φ= 2nπ*

4- Dos ondas armónicas idénticas con λ = 3m viajan en la misma dirección a una velocidad de 2m/s. La segunda onda se origina desde el mismo punto que la primera, pero a un tiempo posterior. Determina el mínimo intervalo de tiempo posible entre los momentos de inicio de las dos ondas si la amplitud de la onda resultante es la misma que la de las dos ondas iniciales. *R=0,5s*

5- Considera la cuerda de longitud L de una guitarra afinada. ¿En qué punto a lo largo de la cuerda (fracción de la longitud desde un extremo) debe pulsarse y en qué punto debe mantenerse el dedo ligeramente contra la cuerda de manera que el segundo armónico sea el modo de vibración más prominente? *R: L /2; se pulsa en L/4*

6- Una cuerda de densidad lineal igual a 1 $l0^{-3}$ kg/m y de 3m de largo se estira entre dos puntos. Un extremo se hace vibrar transversalmente a 200Hz. ¿Qué tensión en la cuerda establecerá un patrón de onda estacionaria con tres medias ondas en toda la longitud de la cuerda? *R: 160N*

7- En el arreglo mostrado en la figura puede colgarse una masa de una cuerda (con una densidad de masa lineal μ = 0,002kg/m) alrededor de una polea ligera. La cuerda se conecta a un vibrador (de frecuencia constante), y la longitud de la cuerda entre el punto P y la polea es L = 2m.



Cuando la masa m es de 16kg o de 25kg, se observan ondas estacionarias, pero no se observan ese tipo de ondas para cualesquiera otras masas entre estos valores. a) ¿Cuál es la frecuencia del vibrador? (Sugerencia: A mayor tensión en la cuerda, menor número de nodos en la onda estacionaria.) b) ¿Cuál es la masa más grande para la cual podrían observarse ondas estacionarias? *R: a) 350Hz; b) 400kg*

8- Un estudiante mide la profundidad de un pozo con un oscilador de audio de frecuencia ajustable. Se oyen dos frecuencias resonantes sucesivas a 52Hz y 60Hz. ¿Cuál es la profundidad del pozo? *R: 21,44m*

9- Un tubo angosto de vidrio de 0.50 m de longitud y sellado en su fondo se mantiene verticalmente justo debajo de un altoparlante conectado a un generador y amplificador de audio. El tubo se alimenta con un tono de frecuencia creciente en forma gradual, y se observa por primera vez una resonancia de 170Hz. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el recinto? *R: 340m/s*

10- Un tubo de órgano que normalmente suena a 600Hz a 0ºC se conecta a una fuente de helio a esa temperatura. ¿A qué frecuencia sonará ahora? (v_{He}=965m/s) *R: 1748,2Hz*

11- Un tubo abierto de 0.40 m de largo se coloca verticalmente en una cubeta cilíndrica que tiene un área en el fondo de 0,10 m^2. Se vierte agua dentro de la cubeta hasta que un diapasón vibrando de 440Hz de frecuencia, situado sobre el tubo, produce resonancia. Encuentra la masa del agua en la cubeta en este momento. *R: 20,5kg*

12- Un tubo de órgano abierto en ambos extremos está vibrando en su tercer armónico con una frecuencia de 748Hz. La longitud de la tubería es de 0.70 m. Determina la velocidad del sonido en el aire dentro del tubo. *R: 349m/s*

13- Calcula la longitud de una tubería que tiene una frecuencia fundamental de 240Hz si está a) cerrada en un extremo, y b) abierta en ambos extremos. *R: a) 0,354m; b) 0,708m*

14- Al estar parado en el cruce de una calle usted escucha una frecuencia de 560Hz proveniente de la sirena de un auto de policía que se acerca, Después de que este vehículo pasa, la frecuencia observada de la sirena es 480Hz. Determina la velocidad del auto de acuerdo con estas observaciones. *R: 26,15m/s*

15- Desde un helicóptero se lanza un soldado paracaidista que porta un transmisor de radio el cual emite una señal de 500Hz. El radar en el helicóptero rastrea la señal del transmisor conforme cae el paracaidista. Si la frecuencia percibida se vuelve constante a 450Hz, ¿cuál es la velocidad terminal del paracaidista?, Considera la velocidad del sonido en el aire igual a 343 m/s y supone que el paracaidista siempre permanece debajo del helicóptero. *R: 38,1m/s*

16- Un camión de bomberos que se mueve hacia la derecha a 40 m/s suena su bocina (frecuencia de 500Hz) a los dos vehículos (un auto y un camión)que están delante de él. El auto se mueve hacia la derecha a 30m/s en tanto que la camioneta está detenida. a) ¿Qué frecuencia perciben los pasajeros en el auto? b) ¿Cuál es la frecuencia que escuchan los pasajeros en la camioneta. c) cuando el carro de bomberos está 200 m del automóvil y a 250m de la camioneta, los pasajeros en el auto perciben 90dB. En ese momento, ¿cuál es el nivel de intensidad que perciben los pasajeros de la camioneta? *R: a) 515Hz; b) 566Hz; c) 88dB*

17- El sonido de un diapasón de 1000Hz se compara contra la emisión desconocida de un alambre vibratorio. Si las pulsaciones se oyen con 4Hz de frecuencia. ¿qué se puede decir acerca de la frecuencia del alambre? *R: f= 1004Hz o 996Hz*

18- En ciertos intervalos del teclado de un piano más de una cuerda se afina a la misma nota para proporcionar intensidad adicional. Por ejemplo la nota a 110Hz tiene dos cuerdas en este tono. Si una cuerda se afloja de su tensión normal de 600 N a 540 N, ¿qué frecuencia de pulsación se escuchará cuando las dos cuerdas se toquen simultáneamente? *R: 5,6Hz*

19- Mientras intenta afinar una nota Do a 523Hz, un afinador de pianos escucha tres pulsaciones por segundo entre el oscilador y la cuerda. a) ¿Cuáles son las posibles frecuencias de la cuerda, b) ¿En qué porcentaje debe cambiarse la tensión en la cuerda para afinarla? *R: a) 520Hz o 526Hz; b) Se debe tensar 1,1% o aflojar 1,1%*

BIBLIOGRAFÍA

Alonso M., Finn E.J. “Física”. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. E.E.U.U. 1995.

Blatt, F. “Fundamentos de Física”. Prentice - Hall Hispanoamericana, Méjico, 1991..

Halliday - Resnick “Fundamentos de Física”. CECSA, Méjico, 1980.

Lea S.M., Burke J.R., “La naturaleza de las cosas” Física: Vol I. Ed. Internacional Thomson, México, 1998.

Sears F y Zemansky, M. “Física”. Aguilar, Madrid, 1981.

Serway R. A. “Física”. Ed Mac Graw Hill, México, 1993.

Tipler, P.A.; Física para la ciencia y la Tecnología (4ª Ed.) Ed. Reverté, Barcelona, 2000.

Wilson J. D. “Física”. Prentice - Hall Hispanoamericana, Méjico, 1994.