Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Ilustración basada en la obra: "Les mains liees" de Pablo Picasso.

Continuidad

4º AÑO

Matemática

Cod.1408-14

NoemíLagreca
Betina Cattaneo

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

INTRODUCCIÓN:

En nuestra vida diaria aparecen numerosos fenómenos que tienen un comportamiento continuo como, por ejemplo, el desplazamiento de un vehículo que varía en forma continua con el tiempo, pero así también otros que presentan discontinuidades como las corrientes eléctricas.

Al referirnos a un proceso continuo intuitivamente se puede pensar en un acontecimiento sin interrupciones ni cambios abruptos.

Cuando deseamos representar algunos valores que se van recopilando de determinadas experiencias, por aplicación de una función, es frecuente que los puntos que se van obteniendo, si es posible, se unan mediante una curva continua, en lugar de “saltar” de un punto a otro, sin tomar en cuenta los valores intermedios.

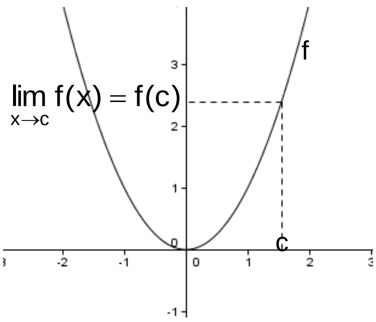
Geométricamente, cualquier función, cuya gráfica, se puede trazar en su dominio, sin levantar el lápiz de la hoja de papel, es un ejemplo de función continua.

En el desarrollo de este tema nos proponemos precisar qué significa que una función sea continua.

II) DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Continuidad en un punto

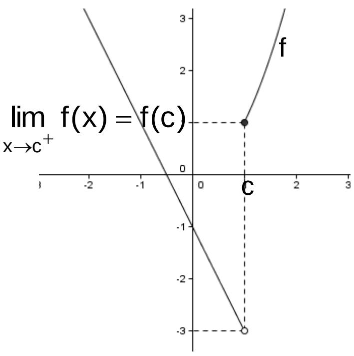
Definición:



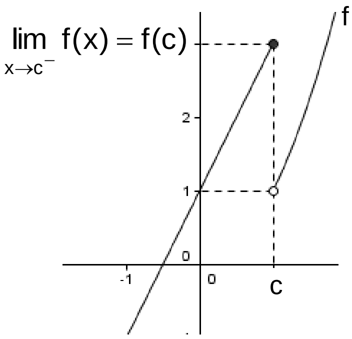
- Una función f es **continua** en $x = c$, si se cumplen las siguientes condiciones:
  1º) exista $f(c)$, es decir, c pertenece al dominio de la función
  2º) exista $\lim_{x\to c} f(x)$; es decir, $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$
  3º) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Continuidades laterales

Definiciones:



- Una función f es **continua por derecha** en $x = c$, con $c \in [a;\ b)$, si se cumplen las siguientes condiciones:
  1º) exista $f(c)$, es decir, c pertenece al dominio de la función
  2º) exista $\lim_{x\to c^+} f(x)$
  3º) $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$



- Una función f es **continua por izquierda** en $x = c$, con $c \in (a;\ b]$, si se cumplen las siguientes condiciones:
  1º) exista $f(c)$, es decir, c pertenece al dominio de la función
  2º) exista $\lim_{x\to c^-} f(x)$
  3º) $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$

Continuidad de una función en un intervalo abierto (a; b)

Definición:

Una función f es continua en un intervalo abierto (a; b), si y solo si la función es continua en todos los puntos del mismo.

Continuidad de una función en un intervalo cerrado [a; b]

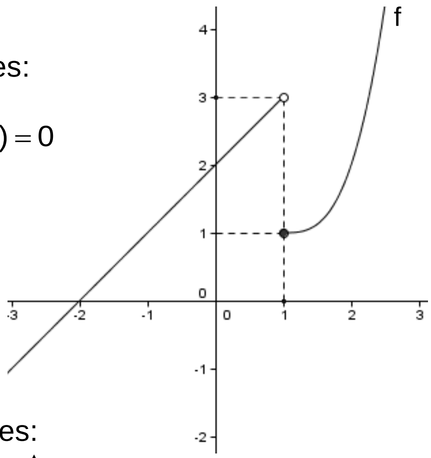
Definición:

Una función f es continua en un intervalo cerrado [a; b] si es continua en el intervalo abierto (a; b) y es continua por la derecha de a y continua por la izquierda de b.

Si una función f no es continua en un punto c, diremos que f es **discontinua** en c o que c es un punto de discontinuidad de f.

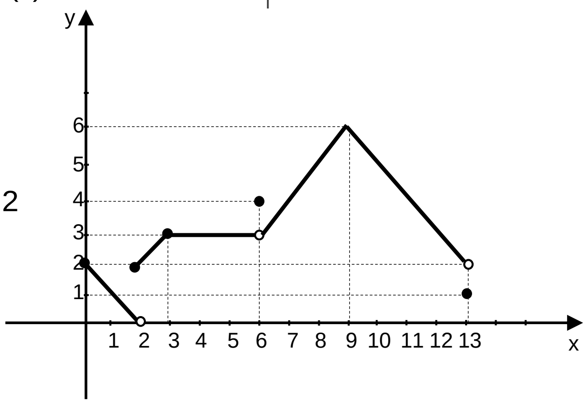
Ejemplos:

1) Observando la gráfica podemos concluir que la función f(x) es:



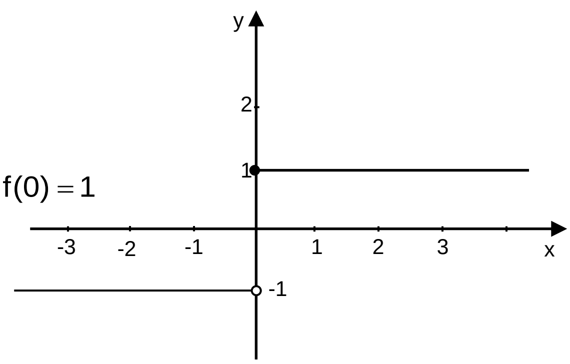
- ◊ continua en x = -2 ya que $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = 0$
- ◊ continua por derecha en x = 1 ya que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$
- ◊ discontinua en x = 1 ya que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$

2) Observando la gráfica podemos concluir que la función f(x) es:



- ◊ discontinua en $x = 2$ pues no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$
- ◊ discontinua en $x = 6$ pues $\lim_{x\to 6} f(x) \neq f(6)$
- ◊ continua por derecha en x = 2 pues $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 2$

3) La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es:



- ◊ continua por la derecha en x = 0 pues $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$
- ◊ discontinua en x = 0 pues no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

En los casos anteriores analizamos la continuidad de las funciones observando su gráfica. En lo que sigue, lo haremos utilizando como recurso analítico, el concepto de continuidad y las propiedades de los límites, sin recurrir a la gráfica.

Ejemplos

a. ¿La función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{|x+4|} & \text{si } x>-4\\ 2x & \text{si } x\le -4\end{cases}$ es continua en $c=-4$?

Para probar que la función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{|x+4|} & \text{si } x>-4\\ 2x & \text{si } x\le -4\end{cases}$ es continua en $c=-4$, hay que demostrar que:

1º) Exista $g(-4)$: $g(-4)=-8$

2º) Exista $\lim\limits_{x\to -4} g(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -4^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x+4}{|x+4|}=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x+4}{x+4}=\lim\limits_{x\to -4^+}1=1\\ \lim\limits_{x\to -4^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -4^-}2x=-8\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ no existe } \lim\limits_{x\to -4} g(x)$$

Por lo tanto $g(x)$ no es continua en c = -4

b. ¿La función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{x^2-25} & \text{si } x>5\\ \dfrac{1}{10} & \text{si } x\le 5\end{cases}$ es continua en $c=5$?

Siguiendo el ejemplo anterior:

1º) $g(5)=\dfrac{1}{10}$

2º) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x-5}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{10}\\ \lim\limits_{x\to 5^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{10}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5} g(x)=\dfrac{1}{10}$$

3º) $\lim\limits_{x\to 5} g(x)=g(5)$

Por lo tanto $g(x)$ es continua en $x=5$

c. ¿La función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} & \text{si } x\ne 1\\ 4 & \text{si } x=1\end{cases}$ es continua en $c=1$?

1º) $g(1)=4$

2º) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\cdot\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x^2-1)}=2\cdot 1=2$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)\ne g(1)$:

Por lo tanto $g(x)$ no es continua en $x=1$

Ejercicios:

1- Analiza, justificando la respuesta, que la función $g(x)$ es continua en $x=c$ en cada caso.

a. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} & \text{si } x>2\\ 3x-7 & \text{si } x\le 2\end{cases}$; $c=2$

b. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-2x}{x+1} & \text{si } x\ne -1\\ 4 & \text{si } x=-1\end{cases}$; $c=-1$

2- Determina el valor de M, si existe, para que la función f(x) sea continua en x = c

a. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2-4\right)}{x-2} & \text{si } x>2\\ Mx+5 & \text{si } x\le 2\end{cases}$; $c=2$

b. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-x} & \text{si } x<1\\ Mx & \text{si } x\ge 1\end{cases}$; $c=1$

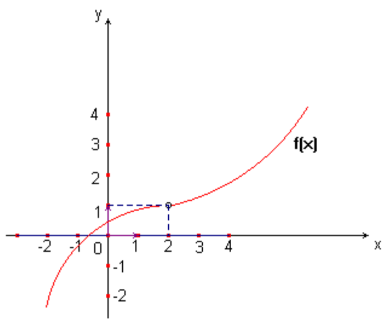
III) CLASIFICACIÓN DE DISCONTINUIDADES

Teniendo en cuenta la definición de continuidad en un punto, podemos concluir que las discontinuidades se pueden dar por las siguientes causas:

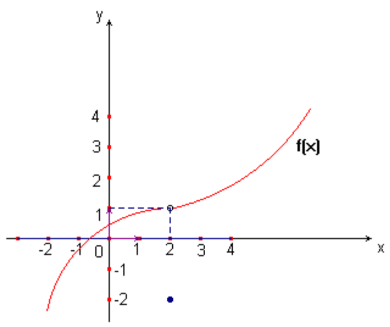
- No pertenecer el punto al dominio de la función, es decir, no existe la imagen en dicho punto
- La no existencia del límite en el punto
- En el caso de existir la imagen y el límite en el punto, ambos no coincidan

Ejemplos:

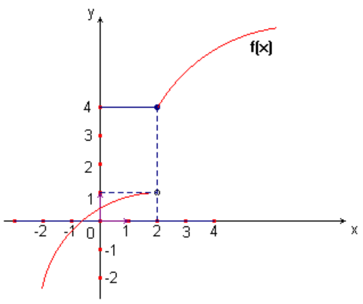
a)



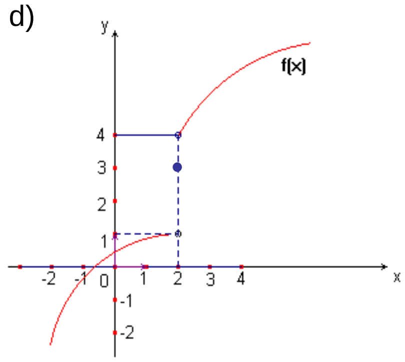
b)



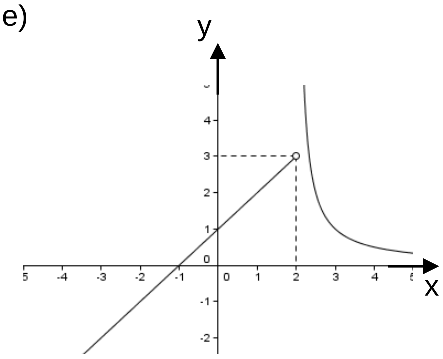
c)



d)



e)



En todos los casos vistos anteriormente, la función f presenta una discontinuidad en 2. La misma se presenta debido a:

Ejemplo a:

No existe la imagen en x = 2

Ejemplo b:

Existe la imagen en x = 2 pero no coincide con el límite en dicho puntos

Ejemplos c; d y e:

No existe el límite en dicho punto

Definiciones:

Diremos que:

- **f** presenta en c una discontinuidad **evitable** o **eliminable** cuando exista el $\lim_{x \to c} f(x)$ (en nuestros ejemplos, se presenta una discontinuidad evitable en c = 2 para los casos a y b)
- **f** presenta en c una discontinuidad **inevitable** o **no eliminable** cuando no exista el $\lim_{x \to c} f(x)$ (en nuestros ejemplos, se presenta una discontinuidad inevitable en c = 2 para los casos c; d y e)

IV) PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Si la funciones f(x) y g(x) son continuas en x = c, entonces las siguientes funciones son continuas en x = c.

1) $(f+g)(x)$
2) $(f-g)(x)$
3) $(f.g)(x)$
4) $k.f(x)$
5) $(f/g)(x)$ si $g(c) \neq 0$

Las demostraciones de estas propiedades no se realizará en el presente curso

Consecuencias de las propiedades anteriores

Puede demostrarse, aplicando las propiedades anteriores y la definición de continuidad, que los siguientes tipos de funciones son continuas para todo c de su dominio:

Constante: $f(x) = k,\ k \in R$

Potencia: $f(x) = x^n,\ n \in N$

Polinómicas: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ \forall n \in N_0$

Racionales: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$**,** siendo P(x) y Q(x) funciones polinómicas

Raíz: $f(x) = \sqrt[n]{x},\ \forall n \in N\text{-}\{1\}$

Exponenciales: $f(x) = a^x,\ \forall a \in R^+\text{-}\{1\}$

Logarítmicas: $f(x) = \log_a x,\ \forall a \in R^+\text{-}\{1\}$

Trigonométricas y sus inversas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente y sus respectivas inversas)

Teorema 1

Si f es una función continua en c y g es continua en f(c), entonces la función compuesta gof es continua en c, con c perteneciente al dominio de la composición.

En símbolos:

H) f es una función continua en c y g es continua en f(c)
T) gof es continua en x = c

La demostración de este teorema no se realizará en el presente curso

Ejemplos:

1- Dada la función $f(x)=\sqrt[5]{2x^2+24}$, analizaremos su continuidad en $x=2$, para ello deberemos probar que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+24\right)\overset{(1)}{=}32 \\ \lim\limits_{x\to 32}\sqrt[5]{x}\overset{(2)}{=}2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\sqrt[5]{2x^2+24}\overset{(3)}{=}2=f(2)$$

(1) $2x^2+24$ es continua en x = 2 por ser función polinómica
(2) $\sqrt[5]{x}$ es continua en x = 32 por ser función raíz
(3) Teorema 4

2- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad x\geq 0 \wedge x\neq 3\\ 5 & \text{si} \quad x=3\\ -2 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

a) Realiza la gráfica
b) Analiza la continuidad de f(x) en los reales especificando los tipos de discontinuidad y justificando la respuesta.
c) Determina A (si existe) para que g(x) sea continua en x = 3

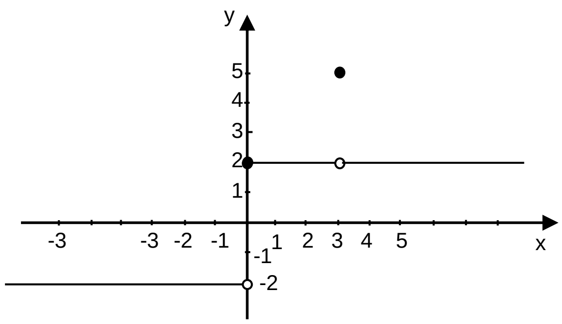
$$g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si} \quad x\neq 3\\ A & \text{si} \quad x=3\end{cases}$$

d) Determina B (si existe) para que h (x) sea continua en x = 0

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si} \quad x\neq 0\\ B & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

Solución:

a)



b) $\forall x>3$ la función es continua por ser una función constante

$\forall 0<x<3$ la función es continua por ser una función constante

$\forall x<0$ la función es continua por ser una función constante

Para x = 3 la función presenta una discontinuidad evitable ya que existe el límite en dicho punto y vale 2

Para x = 0 la función presenta una discontinuidad inevitable ya que no existe el límite en dicho punto pues los límites laterales son distintos

c) A = 2

d) no existe B tal que la función sea continua en 0

Ejercicio:

3- Indica los puntos en los cuales la función dada en cada caso es discontinua y luego clasifícalas.

a. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ b. $f(x)=\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-1}$ c. $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$

4- Demuestra que cada una de las siguientes funciones es continua en el intervalo indicado

a) $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; $(-2;0)$ c) $f_5(x)=\text{sen}(x+1)$; $[0;\pi]$

b) $f_6(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+1}{4} & \text{si } x>0\\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } x\le 0\end{cases}$; $[-1;1]$

Teorema 2 ***Teorema del valor intermedio (TVI)***

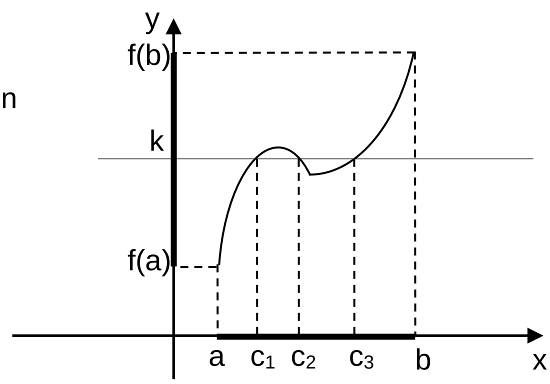
Si f es una función continua en $[a;b]$, entonces f toma todos los valores entre f(a) y f(b). Es decir, si una función f es continua en $[a;b]$, entonces existe al menos un c perteneciente al $(a;b)$ tal que f(c) = k con k entre f(a) y f(b).

En símbolos:

H) f es una función continua en $[a;b]$ y k un número entre f(a) y f(b)

T) $\exists\, c\in(a;b)$ tal que $f(c)=k$

La demostración de este teorema queda fuera del alcance de este curso, solo haremos su interpretación geométrica.



Una consecuencia del teorema del valor intermedio

Un problema matemático frecuente es saber si una ecuación tiene raíces reales. El teorema anterior se puede particularizar de la siguiente manera:

Teorema 3 ***Teorema de Bolzano***

Si f es una función continua en $[a;b]$ y el signo de f(a) es distinto al signo de f(b), entonces f presenta alguna raíz en $(a;b)$.

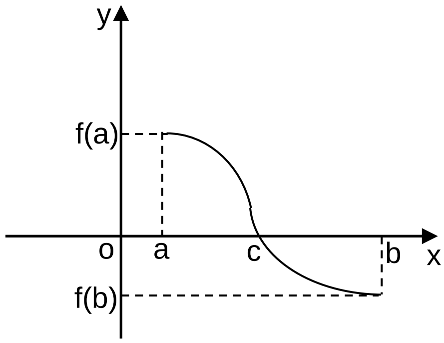
Gráficamente, este teorema asegura que la gráfica de una función continua y con imágenes de distinto signo en los extremos del dominio, corta al eje x en al menos un punto.

En símbolos:

H) f es una función continua en $[a;b]$ y signo de f(a) distinto al signo de f(b)

T) $\exists\, c \in (a;b)$ tal que $f(c)=0$

La demostración de este teorema queda fuera del alcance de este curso, solo haremos su interpretación geométrica.



Ejemplo:

La función $f(x)=x^3-15x+1$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[-4;\ 4]$.

Según el teorema anterior si la función es continua en ese intervalo y los signos en los extremos son distintos, asegura que existe por lo menos un cero en el intervalo abierto.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ es continua en } [-4;4] \text{ por ser función polinómica} \\ f(-4)=-3<0 \\ f(4)=3>0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists c \in (-4;4) / f(c)=0$$

<u>Ejercicios</u>:

5- Demuestra que la ecuación $x^5-3x^4-2x^3-x+2=0$ tiene una solución real entre 0 y 1.

➢ <u>BIBLIOGRAFÍA</u>:

* MATEMÁTICA II – N. Buschiazzo, E. Fongi, M. Inés González, L. Lagreca – Editorial Santillana (Edición 2000)
* PRECÁLCULO. MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO – James Stewart , Lothar Redlin , Saleen Watson – Editorial Cengage Learning / Thomson Internacional. (Edición 2007)
* CÁLCULO. TRASCENDENTES TEMPRANAS. Cuarta Edición - James Stewart - Editorial Cengage Learning / Thomson Internacional. (Edición 2002)
* CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Novena Edición - Edwin Joseph Purcell, Edwin Joseph Purcell Dale Varberg – Editorial Pearson Educación (Edición 2007)