

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Introducción al modelado de sistemas físicos

Cod. 21507-14

Tecnología de Control

Prof. Martín Crespo
Prof. Claudia Pendino

Plantas Industriales

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS

50 AÑO



1. Introducción

El control automático ha jugado un papel vital en el avance de la ciencia y de la ingeniería. Además de su extrema importancia en vehículos espaciales, sistemas de piloto automático de aeronaves, sistemas robóticos y otros, el control automático se ha vuelto parte integral e importante de los procesos industriales y de manufactura modernos. Resulta esencial en operaciones industriales como el control de presión, temperatura, humedad y viscosidad, y flujo en las industrias de transformación.

Como los avances en la teoría y práctica del control automático brindan medios para lograr el funcionamiento óptimo de sistemas dinámicos, mejorar productividad, liberarse de la monotonía de muchas operaciones manuales rutinarias y repetitivas, y otras ventajas, la mayoría de los ingenieros y científicos deben poseer un buen conocimiento en ese campo. Quizá la cualidad más característica de la ingeniería de control sea la oportunidad de controlar máquinas y procesos industriales y económicos en beneficio de la sociedad.

Definiciones:

Variable controlada: Es la cantidad o condición que se mide y controla.

Variable manipulada: Es la cantidad o condición modificada por el controlador. Normalmente es la salida del sistema.

Control: Significa medir el valor de la variable controlada del sistema, y aplicar al sistema la variable manipulada para corregir o limitar la desviación del valor medido, respecto al valor deseado.

Planta: Una planta ó equipo es un conjunto de piezas funcionando juntas, para lograr un determinado objetivo. Aquí llamaremos planta a un objeto cualquiera físico que ha de ser controlado.

Proceso: Cualquier operación que se vaya a controlar: procesos químicos, económicos biológicos.

Sistema: Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente y emplean un determinado objetivo.

Perturbación: Una perturbación tiende a afectar el valor de la salida de un sistema. Si se genera dentro del sistema se denomina interna, mientras que si se genera fuera del sistema constituye una entrada.

Control de realimentación: Este control tiende a reducir la diferencia entre la salida y la entrada de referencia de un sistema. Perturbaciones no previsibles.

Sistema de control realimentado: Un sistema de control real es aquel que tiende a mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada de referencia, comparando ambas y utilizando la diferencia (E) como parámetro de control.

Servomecanismo: Un servomecanismo es un sistema de control realimentado en el cual la salida es alguna posición, velocidad o aceleración mecánica.

1.1. Control a lazo cerrado y lazo abierto

Lazo cerrado: Un sistema de control de lazo cerrado es aquel en el que la salida tiene efecto directo sobre la acción de control. La señal de error actuante es la diferencia entre la señal de entrada y la realimentación (puede ser salida). Entra del detector o control de manera de reducir el error y llevar la salida al valor deseado. El lazo cerrado, entonces es el uso de la realimentación para reducir el error del sistema.

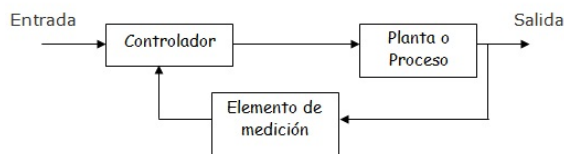


Figura 1: Diagrama de bloques de un sistema de control a lazo cerrado.

Ejemplos de sistemas a con control a lazo cerrado son el control de temperatura (calefacción hogareña) donde la realimentación puede ser manual o automática.

Lazo abierto: Los sistemas de control de lazo abierto son sistemas en los que la salida no tiene efecto sobre la acción de control, como se puede apreciar en la figura 2. Aquí la salida no se mide ni se realimenta para compararla con la entrada. Ejemplo de un sistema típico a lazo abierto es el lava-ropa: aquí el manejo, el lavado



y el enjuague en la máquina se realizan en una base de tiempos, la máquina no mide la salida (la limpieza de la ropa), o sea, no se compara la salida con la referencia.

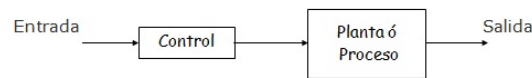


Figura 2: Diagrama de bloques de un sistema de control a lazo abierto.

Comparación entre los sistemas de control de lazo abierto y lazo cerrado:

- Lazo cerrado: El uso de la realimentación hace que su respuesta sea insensible a las perturbaciones externas y variaciones internas de parámetros del sistema. (Se utilizan componentes más económicos)
- Lazo abierto: Se utilizan en sistemas donde las entradas son conocidas previamente y en los que no hay perturbaciones. Normalmente se opta por una combinación de controles de lazo abierto y cerrado.

Requerimiento de proyecto de sistema de control:

- 1- Cualquier sistema de control debe ser estable. La velocidad de respuesta debe ser razonablemente rápida y debe presentar amortiguamiento razonable.
- 2- Un sistema de control debe poder reducir a cero o a un valor pequeño, los errores. (Diferencia entre la salida y la entrada).

2. Modelado de sistemas

Los modelos matemáticos constituyen hoy día un medio de trabajo imprescindible para el especialista en técnica de control de procesos. Es posible realizar un modelo del proceso a regular, de su entorno y de sus leyes de control. No existe un único modelo, sino una serie de modelos. Los modelos más sencillos investigan a priori el comportamiento, los más complejos reproducen el comportamiento del sistema real con máxima fidelidad. Luego existe una solución de compromiso entre elegir el modelo más sencillo, que implica una simplificación excesiva, con el

riesgo de fracaso técnico y el modelo más complejo, que significa una complicación inadecuada, con el riesgo de fracaso económico.

2.1. Modelos matemáticos

Para diseñar el modelo de un sistema se debe empezar a partir de una predicción de su funcionamiento antes que el sistema pueda diseñarse en detalle. La predicción se basa en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema. A esta descripción matemática se la llama modelo matemático. Normalmente el modelo matemático se trata de una serie de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema (modelo teórico).

Sistemas lineales y no lineales:

Sistema Lineal: En este caso las ecuaciones que describen el modelo son lineales, se les aplica el principio de superposición (ante dos entradas la salida es la suma de las respuestas individuales).

Sistema No lineal: No se aplica el principio de superposición. Existe dificultad matemática, normalmente se los aproxima a modelos matemáticos lineales.

Sistemas dinámicos y estáticos:

Sistema Dinámico: Si su salida en el presente depende de una entrada en el pasado.

Sistema Estático: Su salida en curso depende de la entrada en curso. En este caso la salida no cambia si la entrada no cambia. En el dinámico la salida cambia con el tiempo cuando no está en equilibrio.

2.2. Elaboración de modelos

Al aplicar las leyes físicas a un modelo, es posible desarrollar un modelo matemático que describa al sistema (modelo teórico). A veces es imposible desarrollar un modelo teórico, entonces se somete al sistema a un conjunto de entradas conocidas y se miden sus salidas, obteniéndose así un modelo experimental. O sea, se calcula el modelo a partir de las relaciones entrada-salida.

Ningún modelo matemático puede representar al sistema con precisión. Siempre



involucra suposiciones y aproximaciones.

Procedimientos para la obtención del modelo:

1. Dibujar un diagrama esquemático del sistema y definir las variables.
2. Utilizando leyes físicas, escribir ecuaciones para cada componente, combinándolas de acuerdo con el diagrama del sistema y obtener el modelo.
3. Para verificar la validez del modelo, la predicción del funcionamiento obtenida al resolver las ecuaciones del modelo, se compara con los resultados experimentales (la validez del modelo se verifica mediante un experimento). Si el experimento se aleja de la predicción se debe modificar el modelo y se repite el proceso.

2.3. Validación del Modelo

Tanto en el análisis teórico como el análisis experimental, una vez obtenido el modelo es importante su coincidencia con el modelo teórico real. En esto consiste la validación.

Los métodos pueden ser:

- Analizar la respuesta del modelo (al escalón, al impulso, etc.).
- Análisis de polos y ceros del sistema.
- Calcular determinadas relaciones estadísticas.
- Investigar las variaciones de aquellas magnitudes que sean especialmente sensibles a cambios en los parámetros del modelo.

3. Aplicaciones

Para definir los modelos necesitamos las leyes físicas correspondientes y así representarlos ya sean eléctricos, hidráulicos, mecánicos, etc. Lo que se pretende

es encontrar analogías para poder a partir de éstas, sin tener conocimiento del funcionamiento de cada sistema en particular, determinar su modelo matemático.

3.1. Sistemas Mecánicos

Para caracterizar y modelar sistemas mecánicos, es necesaria la implementación de leyes que representen la dinámica mecánica. Debido a esto repasamos algunas definiciones para poder determinar los modelos correspondientes a los sistemas mecánicos:

- **Masa [kg]:** La masa de un cuerpo es la cantidad de materia que contiene. Es la propiedad que da su inercia, o sea, su resistencia a parar y arrancar.
- **Fuerza [N]:** Causa que tiende a producir un cambio en el movimiento de un cuerpo sobre el que actúa.
- **Par o Momento de fuerza [Nm]:** Causa que tiende a producir un cambio en el movimiento rotacional de un cuerpo (es el producto de la fuerza por la distancia perpendicular desde un punto de rotación a la línea de acción de la fuerza).
- **Momento de inercia [Kgm²]:** $J = \int r^2 dm$ (r: distancia del eje de rotación al dm). Significa la resistencia que ofrece un cuerpo a su aceleración angular .
- **Desplazamiento [m]:** El desplazamiento x es un cambio de posición de un punto a otro de referencia.
- **Velocidad [$\frac{m}{s}$]:** $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$. La velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo.
- **Aceleración [$\frac{m}{s^2}$]:** $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$. La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.



- **Desplazamiento angular** [rad]: El desplazamiento angular se mide en radianes y se mide en sentido contrario a las agujas del reloj
- **Velocidad angular** [$\frac{rad}{seg}$]: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$. La velocidad angular es la derivada de la posición angular respecto del tiempo.
- **Aceleración angular** [$\frac{rad}{seg^2}$]: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. La aceleración angular es la derivada de la velocidad angular respecto del tiempo.

Leyes de Newton:

- 1° Ley de Newton: *La cantidad de movimiento total en un sistema es constante en ausencia de fuerzas externas.*

$$m.v = cte. \text{ (Movimiento traslacional)}$$

$$J.\omega = cte. \text{ (Movimiento rotacional)}$$

- 2° Ley de Newton: *La aceleración sobre un cuerpo es proporcional a la fuerza que actúa sobre el mismo e inversamente proporcional a su masa.*

$$\sum F = m.a \text{ (Movimiento traslacional)}$$

$$\sum T = J.\alpha \text{ (Movimiento rotacional)}$$

- 3° Ley de Newton-Ley de acción y reacción. *A toda acción se opone una reacción de igual magnitud.* Elementos de inercia:

$$\text{Masa (Movimiento traslacional)}$$

$$\text{Momento de inercia (Movimiento rotacional)}$$

3.1.1. Ejemplos

La mecánica clásica (newtoniana) se ocupa de describir fenómenos asociados con el movimiento de los cuerpos. Por este motivo, en los sistemas mecánicos tendremos habitualmente como variables descriptivas las posiciones, velocidades

y aceleraciones. A continuación estudiaremos sistemas mecánicos donde aparecen fenómenos de elasticidad y fricción.

Ejemplo N° 1: Sistema masa-resorte

El sistema de la figura 3 puede representarse por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Sigma F_{uerzas} = m.a$$

La fuerza del resorte $f_{resorte}$ será proporcional al desplazamiento x y a la constante elástica k del resorte.

$$\begin{aligned} f_{resorte} &= k.x \\ F - f_{resorte} &= m.a \\ F &= m.a + k.x \\ \Rightarrow F &= m\ddot{x} + k.x \end{aligned} \tag{1}$$

La resolución de la ecuación 1 representa el modelo matemático del sistema.

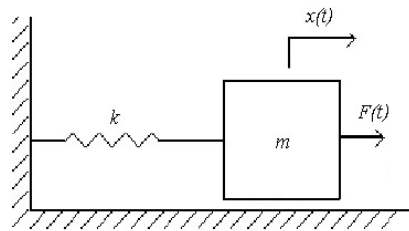


Figura 3: Sistema mecánico masa resorte.

Ejemplo N° 2: Sistema masa-resorte con fricción

En el caso del sistema de la figura 4 ahora se introduce un coeficiente de rozamiento b entre el bloque de masa m y el piso. En el caso de la fuerza de fricción, una hipótesis habitual es representar la misma como una fuerza que se opone al movimiento cuya magnitud se relaciona con la velocidad, ecuación 2.



$$f_{friccion} = b.v_{friccion} \quad (2)$$

La sumatoria de fuerzas del sistemas es:

$$\begin{aligned} F - f_{resorte} - f_{friccion} &= m.a \\ F &= m.a + b.v_{friccion} + k.x \\ \Rightarrow F &= m\ddot{x} + b\dot{x} + k.x \end{aligned} \quad (3)$$

En este caso la resolución de la ecuación 4 representa al modelo matemático del sistema.

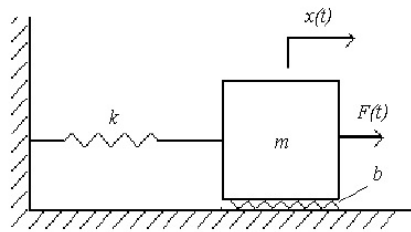


Figura 4: Sistema mecánico masa resorte con fricción.

Ejemplo N° 3: Sistema rotacional con fricción

Ahora estudiaremos un sistema rotacional. El esquema, que se puede observar en la figura 5, posee una masa de inercia J solidaria a un eje. A dicho eje se la aplica un torque de entrada τ_{em} que hace girar a la masa en sentido horario. En este caso también se considera que existe un torque que se opone al movimiento debido a la fricción lineal b :

$$\tau_{friccion} = b.\omega$$

La sumatoria de torques del sistemas es:

$$\tau_{em} - \tau_{friccion} = J.\alpha$$

$$\begin{aligned}\tau_{em} &= b.\omega + J.\alpha \\ \Rightarrow \tau_{em} &= b.\dot{\theta} + J.\ddot{\theta}\end{aligned}\quad (4)$$

En este caso la resolución de la ecuación 4 representa al modelo matemático del sistema.

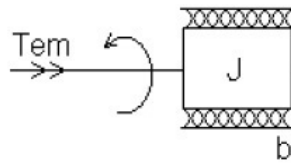


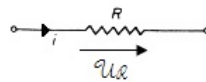
Figura 5: Sistema rotacional.

3.2. Sistemas Eléctricos

En los sistemas eléctricos encontramos como variables descriptivas principales a las tensiones y corrientes. La teoría de circuitos caracteriza los fenómenos asociándolos a dipolos que vinculan estática o dinámicamente tensiones y corrientes.

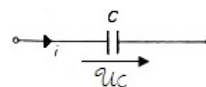
Leyes de Electricidad:

Basado en la ley de *Ohm*, la teoría de circuitos representa el fenómeno de disipación de energía mediante un dipolo (resistencia) que establece una relación entre la tensión y corriente.



$$U_R = I.R$$

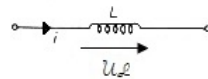
Otros fenómenos fundamentales de estos sistemas son la acumulación de energía en forma de campo eléctrico. Este es descrito por la ley de *Coulomb*, de la cual se deducen las relaciones que describen el fenómeno de capacitancia.





$$U_C = \frac{1}{C} \cdot \int i \, dt$$

Alrededor de una carga en movimiento o corriente hay una región de influencia que se llama campo magnético. La variación del campo magnético con respecto al tiempo, induce una fuerza electromotriz en el circuito. Las relaciones entre las variables asociadas al fenómeno de almacenamiento de energía en el campo magnético pueden deducirse de las leyes de *Faraday* y de *Ampere*. El fenómeno, que la teoría de circuitos caracteriza mediante la inductancia, puede describirse a partir de la siguiente ecuación.



$$U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Por último encontramos relaciones asociadas a la estructura de los circuitos eléctricos. Estas no son otras que las leyes de *Kirchhoff* de tensión y corriente. Recordemos que éstas establecen respectivamente que la suma de las tensiones en una malla cerrada es igual a cero y que la suma de las corrientes entrantes a un nudo es también nula.

3.2.1. Ejemplos

Ejemplo N° 1: Sistema RC

El sistema a estudiar se puede observar en figura 6. Consta de una resistencia R y un capacitor C en serie, a los cuales se le aplica una tensión de entrada $U(t)$.

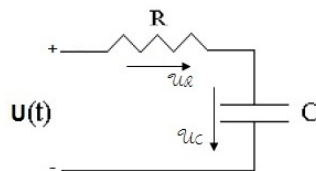


Figura 6: Sistema RC serie.

De acuerdo a la ley de *Kirchhoff* de tensión, la sumatoria de tensiones en la malla será nula:

$$\Sigma U = 0 \Rightarrow U(t) = i.R + \frac{1}{C} \cdot \int i dt$$

Si se considera a la corriente como el flujo de carga $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, se obtiene la ecuación 5. Esta ecuación describe la dinámica del sistema y permite representar la evolución de la corriente respecto al tiempo.

$$U(t) = \dot{q}.R + \frac{1}{C}.q \quad (5)$$

Notar que inicialmente se consideró al capacitor descargado. En el caso de que éste hubiese estado cargado, se tendría que haber considerado dicha carga como condición inicial de la integral.

Ejemplo N° 2: Sistema RLC

El sistema a estudiar se puede observar en figura 7. La única diferencia al anterior es que ahora se agregó una inductancia L en serie.

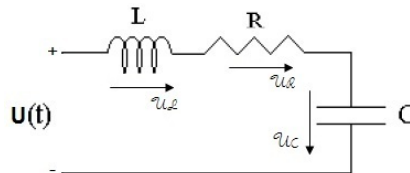


Figura 7: Sistema RLC serie.

De acuerdo a la ley de *Kirchhoff* de tensión, la sumatoria de tensiones en la malla será nula:

$$\Sigma U = 0 \Rightarrow U(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + i.R + \frac{1}{C} \cdot \int i dt$$

Si se considera a la corriente como el flujo de carga $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, se obtiene la ecuación 6. Observar que en este caso, a diferencia del anterior, la carga q aparece en la ecuación con derivada doble (\ddot{q}). Esto será clave para futuros análisis de la evolución de la corriente respecto al tiempo.



$$U(t) = L.\ddot{q} + \dot{q}.R + \frac{1}{C}.q \quad (6)$$

En el caso de las inductancias no se consideran 'magnetizaciones iniciales' ya que lo que interesa es la variación del flujo magnético respecto del tiempo ($L.\frac{di}{dt}$). En la práctica dichas aproximaciones se limitan a la característica lineal de la inductancia, tema que no será de estudio en este curso.

3.3. Sistemas Análogos

Los sistemas que pueden representarse mediante el mismo modelo matemático, pero que son diferentes físicamente se llaman sistemas análogos. Así pues, los sistemas análogos se describen mediante las mismas ecuaciones diferenciales o conjuntos de ecuaciones.

El concepto de sistema análogo es muy útil en la práctica por las siguientes razones:

- La solución de la ecuación que describe un sistema físico puede aplicarse directamente al sistema análogo en otro campo.
- Puesto que un tipo de sistema puede ser más fácil de manejar experimentalmente que otro, en lugar de construir y estudiar un sistema mecánico (o hidráulico, neumático, etc.), podemos construir y estudiar su análogo eléctrico, dado que éstos son más fáciles de tratar experimentalmente.

Si observamos las figuras 8 y 9, podemos apreciar distintas analogías entre sistemas mecánicos y eléctricos.

$$F(t) = m.\ddot{x} + k.x$$

$$U(t) = L.\ddot{q} + \frac{1}{C}.q$$

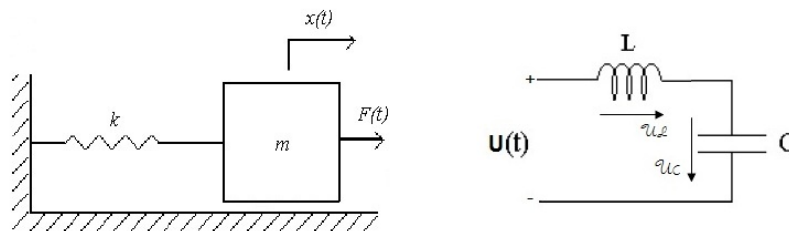


Figura 8: Analogía sistema mecánico-eléctrico.

$$F(t) = m.\ddot{x} + b.\dot{x} + k.x$$

$$U(t) = L.\ddot{q} + R.\dot{q} + \frac{1}{C}.q$$

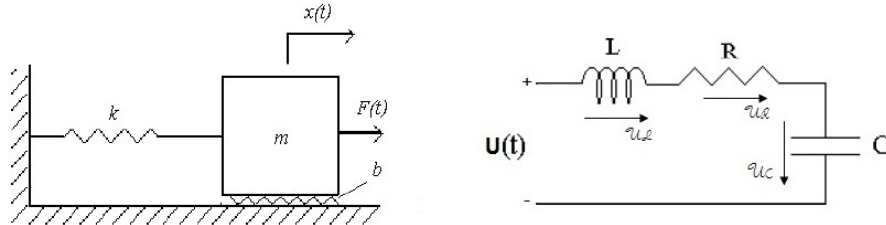


Figura 9: Analogía sistema mecánico-eléctrico.

En el caso de los sistemas mecánicos, el resorte y la masa se comportan como *elementos almacenadores de energía* mientras que la fricción *disipa energía*. En los sistemas eléctricos los elementos almacenadores de energía son el capacitor y la inductancia (energía en forma de campo eléctrico y magnético respectivamente). La resistencia es claramente un elemento que disipa energía por efecto *Joule*.

Si observamos las ecuaciones que rigen a dichos sistemas, podemos distinguir ciertas analogías entre ambos sistemas.

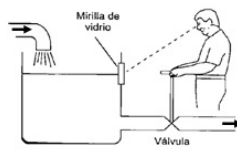
Mecánico		Eléctrico
Traslacional	Rotacional	
Fuerza - $F(t)$	Torque - $\tau(t)$	Tensión - $U(t)$
Desplazamiento - $x(t)$	Angulo - $\theta(t)$	Carga - $q(t)$
Velocidad - $v(t)$	Veloc. angular - $\omega(t)$	Corriente - $i(t)$
Masa - m	Inercia - J	Inductancia - L
Roce - b	-	Resistencia - R
Cte. elástica - k	-	Capacidad(inversa) - $\frac{1}{C}$

Cuadro 1: Analogías.

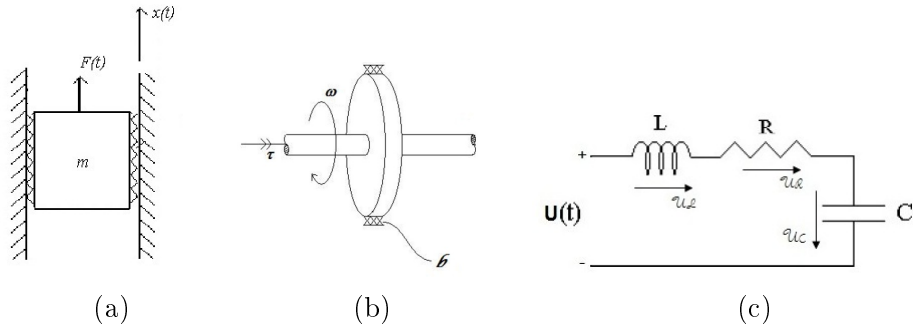


4. Problemas

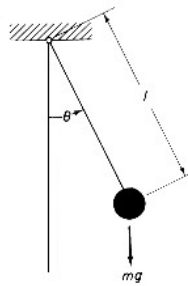
1. Para los siguientes sistemas de control, identificar la entrada, la salida y el proceso por controlar:
 - a) Una tostadora de pan convencional
 - b) Una plancha
 - c) Un refrigerador
 - d) Un lavarropas automático
2. Con respecto al problema anterior, indicar si los sistemas respectivos son de lazo abierto o de lazo cerrado.
3. Con respecto a los sistemas de lazo abierto, ¿Cuál sería la finalidad de agregarles sensores?.
4. Un trabajador mantiene el constante el nivel de un líquido en un tanque observándolo a través de una mirilla y ajustando la apertura de la válvula de salida del líquido. El tanque tiene una entrada de líquido cuyo caudal nunca superará al de salida. Se desea automatizar el sistema. Identifique el tipo de sistema necesario, y todas la variables y magnitudes involucradas en el mismo.



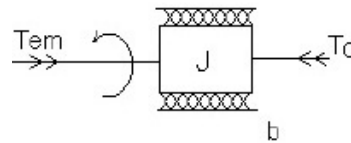
5. Para los sistemas de las figuras determinar el modelo matemático, planteando todas las ecuaciones.



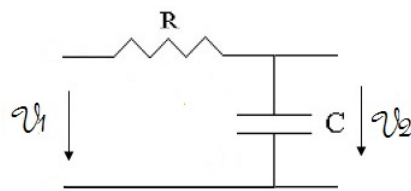
6. El péndulo de la figura tiene una esfera de masa m . Suponiendo que no hay fricción y que la cuerda es de masa despreciable y no posee elasticidad, encuentrese la ecuación analítica del movimiento del péndulo.



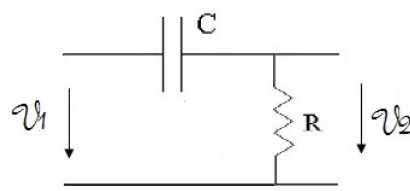
7. Para el sistema de la figura hallar las ecuaciones matemáticas que describan la dinámica de la masa de inercia J .



8. Para los siguientes circuitos determinar la relación entre V_1 y V_2 .



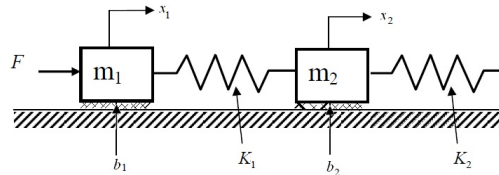
(a) Circuito integrador.



(b) Circuito diferenciador.



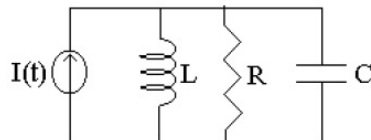
9. Para el sistema de la figura hallar las ecuaciones matemáticas que describan la dinámica de ambas masas.



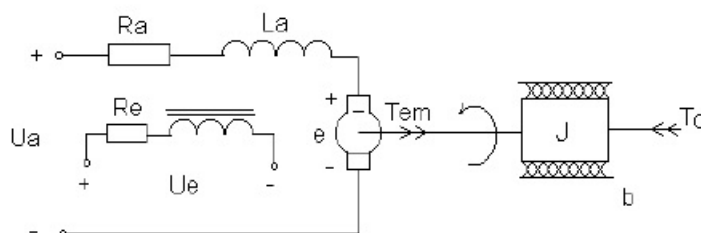
Observación: Notar que la fuerza del resorte $f_{resorte}$ es proporcional al estiramiento o compresión de este.

10. En el sistema de la figura se puede apreciar una fuente de corriente $I(t)$ en paralelo con una inductancia, una resistencia y un capacitor.
- Obtener las ecuaciones que definan la dinámica del sistema.
 - Realizar una analogía con el sistema RLC serie alimentado por una fuente de tensión.

Observación: La fuente de corriente asegura un valor de corriente *constante* para cualquier diferencia de tensión.



11. Hallar las ecuaciones matemáticas que describan la dinámica del motor de corriente continua (MCC) con excitación independiente, que se presenta a continuación .



El MCC consta de dos circuitos galvánicamente independientes: el circuito de excitación o de campo (bobinado del estator) y el circuito de armadura o inducido (bobinado del rotor). La interacción del flujo magnético de excitación en el entrehierro con la corriente establecida en la armadura, produce la conversión de energía eléctrica en energía mecánica. La conversión electromagnético-mecánica de energía responde a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tau_e &= K_m \cdot \psi_e \cdot I_a \\ \epsilon &= K_m \cdot \psi_e \cdot \omega\end{aligned}$$

donde ψ_e es el flujo total abrazado por el arrollamiento de excitación. Para un motor de aproximadamente 150Kw, los valores de ψ_e y K_m son:

$$\begin{aligned}\psi_e &= 300Wb \\ K_m &= 0,016\end{aligned}$$



Referencias

- PENDINO, C**, *Fundamentos de Control*, Instituto Politécnico, 2002.
- KARNOPP, D Y ROSENBERG**, *Introduction to Physical System Dynamics*, Mc. Graw Hill, New York, 1983.
- CÁTEDRA DE DINÁMICA DE LOS SISTEMAS FÍSICOS**, *Sistemas Fluidodinámicos*, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, 1995.
- OGATA, K**, *Ingeniería de control moderna*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1993.
- DORF, R**, *Sistemas modernos de control*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., U.S.A, 1989.
- HERNÁNDEZ GAVIÑO, R**, *Introducción a los sistemas de control*, Prentice-Hall, México, 2010.