Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de R

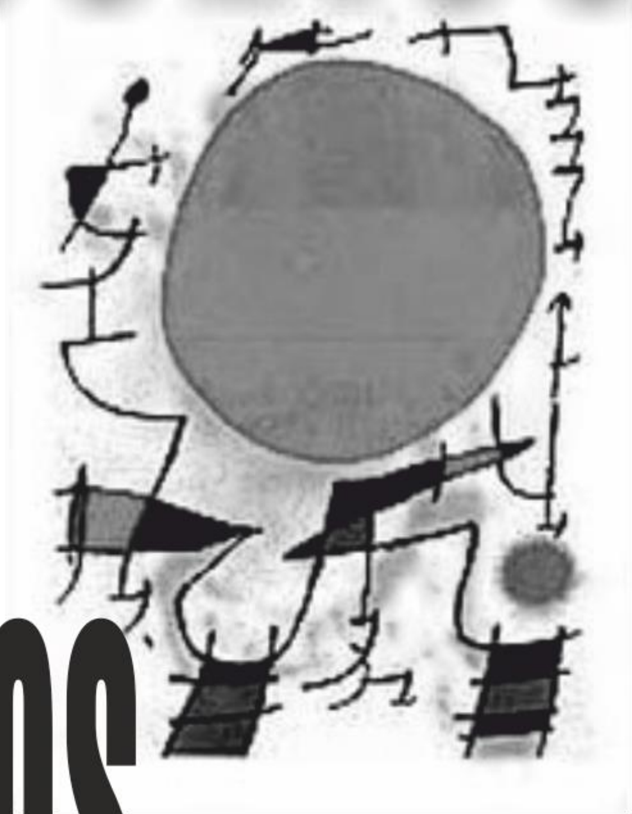


Ilustración basada en la obra "El Sol rojo", de Joan Miró

Polinomios

3º AÑO

Cod. 1306 - 14

Matemática

María del Luján Martinez
Mirta Rosito

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

POLINOMIOS

Polinomios. Generalidades

Llamaremos polinomios de grado n en la variable x, a toda expresión de la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

tal que:

$a_0 \in R$; $a_1 \in R$; $a_2 \in R$; ..... ; $a_n \in R \wedge a_n \neq 0$ siendo $n \in N_0$

En tal expresión, la letra x representa un número real cualquiera y la denominamos variable o argumento del polinomio. Los números $a_0; a_1; a_2; ....; a_n$ se denominan coeficientes.

A los polinomios así definidos, los notaremos con una letra mayúscula, inmediatamente seguida de un paréntesis, dentro del cual colocamos la variable en la que fue definido el polinomio.

En nuestro caso resultaría: P(x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Ejemplos de polinomios en la variable x:

- A(x)= $\sqrt{2} - x + 2x^2$ polinomio de segundo grado en x, cuyos coeficientes son:
  $a_0 = \sqrt{2}$; $a_1 = -1$; $a_2 = 2$
- B(x)= $1 - 2x + \pi x^4 - x^5$ polinomio de quinto grado en x, cuyos coeficientes son:
  $a_0 = 1$; $a_1 = -2$; $a_2 = 0$; $a_3 = 0$; $a_4 = \pi$; $a_5 = -1$

Observaciones

- Todo número real distinto de cero es un polinomio de grado cero
- Sí en la expresión: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ todos los coeficientes $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, a tal expresión la denominamos, por convenio, ***polinomio nulo*** y lo indicaremos con el símbolo: $\bar{0}$
  Por lo tanto el polinomio nulo es el número cero y **carece de grado**
- Al conjunto de todos los polinomios posibles, incluido el polinomio nulo, lo notaremos con la letra **P**.
- De las observaciones anteriores resulta:

$$R \subset \text{P donde } R = \{números \ \ reales\} \text{ y P} = \{polinomios\}$$

- Un polinomio se llama ordenado con respecto a las potencias decrecientes (o **crecientes**) de la variable, cuando ésta figura en cada término elevada a un exponente menor (o **mayor**) que en el término anterior.

Ejemplos:

$D(x) = -x + x^2 - \pi x^4 + \sqrt{2}x^7$ polinomio de séptimo grado en x ordenado en forma creciente

$C(x) = x^3 - \pi x^2 - \frac{1}{2}x + \sqrt{3}$ polinomio de tercer grado en x ordenado en forma decreciente

- Un polinomio se llama **completo** con respecto a su variable cuando figuran todas las potencias de la misma, menores que la de más alto grado existente en el polinomio.

Ejemplos:

$D(x) = -\frac{1}{3}x^4 - 2x + 3x^3 - \frac{1}{5}x^2 - 7$ polinomio de cuarto grado en x, completo

$E(x) = -1 + 2x - 5x^2 - \frac{1}{5}x^3$ polinomio de tercer grado en x, completo y ordenado según las potencias crecientes de la variable

- Cada uno de los términos de la suma que define el polinomio se denomina ***monomio***, el grado de cada monomio es el exponente con el que figura, en él, la variable. De la definición de monomio, deducimos que puede expresarse como un caso particular de polinomio con un único término.

Ejemplos:

- $-\sqrt{2}x^3$ es un monomio de tercer grado
- x^2 es un monomio de segundo grado
- π es un monomio de grado cero

- Dos monomios en la misma variable se llaman ***semejantes si son del mismo grado***, o sea que solo pueden diferenciarse en el coeficiente.

Ejemplo:

$\frac{3}{5}x$; $-\frac{3}{5}x$; $\sqrt{3}\ x$ son monomios semejantes

- Todo polinomio de dos términos se denomina **binomio**, el de tres términos, **trinomio**; el de cuatro términos, **cuatrinomio** ; de allí en más polinomio de cinco, seis, siete términos ,etc. De ello se desprende que un binomio es un polinomio cuyos coeficientes son todos nulos excepto dos, un trinomio es un polinomio cuyos coeficientes son todos nulos excepto tres ,y así sucesivamente.

Ejemplo

$A(x) = \sqrt{2} - x^4$ es un binomio de cuarto grado en x no completo y ordenado en forma creciente.

El polinomio A(x) completo y ordenado en forma decreciente es:
$A(x) = -x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + \sqrt{2}$

Polinomios en varias variables

Lo considerado hasta el presente, se extiende al caso en que los polinomios se definan en varias variables o argumentos, en cuyo caso resultan expresiones del tipo:

$$A(x;y) = x^2 - 2xy + y^3$$
$$B(x;y;z) = x^2 - 2\sqrt{3}xyz^5 + z^2y$$

El desarrollo más detallado de estos polinomios en varias variables no se efectuará en el presente curso.

Valor numérico de un polinomio

El **valor numérico de un polinomio**, es el número que resulta de reemplazar la variable por un número real cualquiera.

De modo que, dado el polinomio

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10$$

Su valor numérico para x = 0 que notaremos P(0) es:

$$P(0) = 0^4 - 0^3 - 7.0^2 + 5.0 + 10 = 10$$

Los valores numéricos para: x = 1 ; x = $\sqrt{5}$; x = -1 son sucesivamente:

P(1) = 8 ; P($\sqrt{5}$) = 0 ; P(-1) = 0

Todo número real b, para el cual se verifique que P(b) = 0, recibe el nombre de **cero del polinomio.**

En el ejemplo dado $\sqrt{5}$ y –1 son ceros del polinomio:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10$$

PRÁCTICA

1. Indica cuáles de las siguientes expresiones son polinomios, en tal caso dar su grado

a) $\frac{1}{5}x^4 - x^3 + 2$ c) $(x-1)(x+3)$ e) $\frac{4}{3}x^6$

b) $\sqrt{x-3}$ d) $\frac{x^6 - x^4 - 3}{x^2 + x}$ f) $4x^4 - 2x^3 + \frac{3}{x}$

2. En centavos por km, el costo de conducir un automóvil a una velocidad v se aproxima por medio de la función polinómica: $C(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}21v + 15$
¿Cuánto cuesta conducir un automóvil a 50 km/h?¿y a 80 km/h?

3. El polinomio $P(R,r) = \pi(R^2 - r^2)$ proporciona el área de una corona circular con radio interior r y con radio exterior R.
Calcula el área de una corona circular con un radio exterior de 20 cm y uno interior de 15 cm.

Igualdad de polinomios

Dados dos polinomios de igual grado, en la misma variable, diremos que son iguales si los coeficientes de los términos del mismo grado resultan iguales.

Simbólicamente:

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$
$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$

Diremos que $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i = 0;1;2;3,...,n$

Operaciones con polinomios

Notemos que ya se han realizado en otras ocasiones operaciones entre expresiones algebraicas , tales como:

I. $(3x^5 – 2x – 4x^3) + (-x^4 + 2x^5 –2x^3)$

II. $(x +5x^3 –2x^2 +1) – (x^4 – x^2 + x)$

III. $(3x^3 – 5 – 2x^2).(3 + 2x)$

Ahora, sólo nos resta efectuarlas mediante el empleo de una disposición práctica

Suma de polinomios

<u>Definición</u>:

Dados dos polinomios $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ y

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$$

Definimos como suma de esos dos polinomios e indicamos P(x)+Q(x) a otro polinomio $S(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_rx^r$ con $c_i = a_i + b_i \quad \forall\ i = 1;2;3;....;r$ siendo r el grado del polinomio suma , si este no es nulo en cuyo caso carece de grado.

Ejemplo

$$\begin{array}{rl} & P(x) = 3x^5 \qquad\ \ - 4x^3 - 2x \\ + & Q(x) = 2x^5 - x^4 - 2x^3 \\ \hline & S(x) = 5x^5 - x^4 - 6x^3 - 2x \end{array}$$

El polinomio S(x), suma entre P(x) y Q(x) es $S(x) = 5x^5 – x^4 – 6x^3 – 2x$

Propiedades:

1. Existencia del elemento neutro
   $\exists\ \overline{0} \in P\ /\ \forall P(x) \in P; P(x) + \overline{0} = P(x)$; esto se expresa diciendo que el polinomio nulo es elemento neutro respecto de la operación suma.

2. Existencia del elemento opuesto
   $\forall R(x) \in P\ \exists\ Q(x) \in P\ /\ R(x) + Q(x) = \overline{0} \Rightarrow Q(x) = -R(x)$

Resta de polinomios

Definición:

Dados P(x) y Q(x) polinomios del conjunto P:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

Ejemplo

$$\begin{array}{rrrrrr} & P(x) = & 5x^3 & -\ 2x^2 & +\ x & +\ 1 \\ + & -Q(x) = -x^4 & & +\ x^2 & -\ x & \\ \hline & D(x) = -x^4 & +\ 5x^3 & -\ x^2 & & +\ 1 \end{array}$$

Luego resulta P(x) – Q(x) = D(x)

Multiplicación de polinomios

Definición:

Dados dos polinomios P(x) y Q (x) llamamos polinomio producto e indicamos M(x), al polinomio que es la suma de todos los productos posibles de cada monomio de P(x) por cada monomio de Q(x).

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr} & P(x) = & 3x^3 & -\ 2x^2 & & -5 \\ \times & Q(x) = & & & 2x & +\ 3 \\ \hline & & 9x^3 & -\ 6x^2 & & -\ 15 \\ & 6x^4 & -\ 4x^3 & & -\ 10x & \\ \hline M(x) = & 6x^4 & +\ 5x^3 & -\ 6x^2 & -\ 10x & -\ 15 \end{array}$$

Luego resulta P(x) . Q(x) = M(x)

Propiedad:

Existencia del elemento neutro

$\exists\ 1 \in P\ /\ \forall P(x) \in P; P(x) .1 = P(x)$;

esto se expresa diciendo que el número real 1 es elemento neutro respecto de la operación multiplicación .

Propiedades

Pueden demostrarse las siguientes propiedades de la suma y el producto de polinomios en base a las propiedades de la suma y producto de números reales.

<table>
<tr><th>SUMA</th><th>MULTIPLICACIÓN</th></tr>
<tr><td>▪ El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado de los polinomios sumandos o carece de grado.</td><td>▪ El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de cada polinomio o carece de grado si uno o ambos de los polinomios son el polinomio nulo</td></tr>
<tr><td>▪ La suma de polinomios cumple con la ley de cierre</td><td>▪ La multiplicación de polinomios cumple con la ley de cierre</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Conmutativa
▪ Asociativa
▪ Existencia del elemento neutro</td></tr>
<tr><td>▪ Existencia de elemento simétrico</td><td>▪ Condición de anulación del producto</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Distributiva del producto con respecto a la suma de polinomios</td></tr>
</table>

<u>PRÁCTICA</u>

4. El polinomio A(x) es de cuarto grado y el polinomio B(x) es de segundo grado
 a) ¿Cuál es el grado de A(x) + B(x)?
 b) ¿Cuàl es el grado de A(x) . B(x)?

5. Dados los polinomios $A(x) = x^2 + x + 1$; $B(x) = x – 1$ y $C(x) = x^2 + x^3 –1 + x^5$, resuelve:

 a) A(x) + C(x)
 b) A(x) + B(x) + C(x)
 c) A(x).B(x)
 d) B(x).[A(x) + C(x)]
 e) $[A(x)]^2 + [B(x)]^3$
 f) [A(x) – C(x)]

6. Calcula los valores de “a”, “b” y “c”, en cada caso

   a) $(a+b)x^3 + ax^2 + (c+a) = 5x^3 - 7x^2 - 2$
   b) .
   c) $\left(3ax^2 - \frac{5}{2}ax + c\right) - \left(\frac{b}{2}x^2 - \frac{1}{2}bx - 5\right) = 4ax^2 - \frac{3}{2}x - 8c$
   d) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = \left(x^2 + ax + c\right)^2$

División de polinomios

Como conclusión de los estudios precedentes sobre polinomios, podemos afirmar que existe una analogía entre las operaciones con números enteros y las operaciones con polinomios.

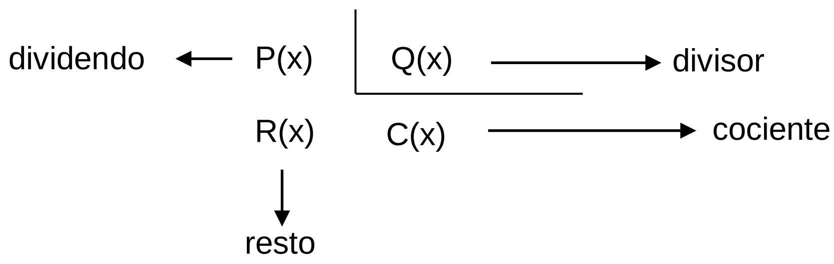
Continuando con tal paralelismo, diremos que dividir dos polinomios P(x) y Q(x) (grado de P(x) $\geq$ grado de Q(x)), es encontrar dos polinomios C(x) y R(x) (este último de grado menor a Q(x) o carente de grado) tales que verifican la siguiente identidad:

P(x) = C(x) . Q(x) + R(x) donde grado de C(x) = grado de P(x) – grado de Q(x)

Resulta además:

P(x) divisible por Q(x) $\Leftrightarrow$ R(x) = 0

Un esquema muy familiar



Para obtener los polinomios cociente C(x) y resto R(x) se realizan los siguientes pasos.

1. Se coloca el polinomio dividendo completo y ordenado en forma decreciente y el polinomio divisor ordenado de la misma forma.

2. Para calcular el primer término del cociente, dividimos el monomio de mayor grado del dividendo por el monomio de mayor grado del divisor

3. El monomio obtenido en 2., se multiplica por el divisor, se coloca bajo el dividendo y se resta, obteniéndose el primer resto. A partir de aquí se repiten los apartados 2 y 3., hasta que el polinomio resto tenga grado menor que el del polinomio divisor o se obtenga el polinomio nulo.

Ejemplo: Dividamos $P(x) = 3x^4 - 2x + 5x^3 + 3$ entre $Q(x) = x^2 - 3x + 2$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 2x + 3 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{3-3}
- & 3x^4 - 9x^3 + 6x^2 & \underbrace{3x^2 + 14x + 36}_{C(x) \longrightarrow \text{cociente}} \\ \cline{1-2}
/ & 14x^3 - 6x^2 - 2x + 3 & \\
- & 14x^3 - 42x^2 + 28x & \\ \cline{1-2}
/ & 36x^2 - 30x + 3 & \\
- & 36x^2 - 108x + 72 & \\ \cline{1-2}
/ & \underbrace{78x - 69}_{R(x) \longrightarrow \text{resto}} &
\end{array}
$$

PRÁCTICA

7. En una división de polinomios, el dividendo es de grado siete y el divisor de grado cuatro. ¿Cuál es el grado del cociente?. ¿Y el grado del resto?

8. Calcula el cociente y el resto en:

   a) $(x^4 - x^3 - 8x^2 - 2) : (x^2 - 3x - 1)$
   b) $(x^5 - 6x^3 - 25x) : (x^2 + 3x)$

9. Determina si la siguiente proposición es V(verdadera) o F(falsa) .Justifica.

   $\frac{52}{3}x + \frac{37}{3}$ es el resto de la división $(6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5) : (3x^2 - 3x - 1)$

10. Analiza la falsedad o veracidad de $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ es un cociente exacto

División de un polinomio de grado mayor o igual a 1 por otro de primer grado

Un caso que se presenta con mucha frecuencia, es la división de un polinomio P(x) de grado n por un binomio de la forma x + h ($\forall h \in R$), en este caso C(x) resulta de grado n – 1 y R(x) es de grado 0 o carece de grado; es decir el resto resultará un número real (R), que será cero si P(x) es divisible por x + h .
Sabemos que si P(x) es el dividendo; x + h el divisor y R el resto, deberá verificarse:

$$P(x) = C(x) .(x + h) + R$$

Teorema del resto

El resto R de una división de un polinomio en x por un binomio x+h (donde h es un número real cualquiera), es el valor numérico del polinomio dividendo cuando la variable asume el valor (-h)

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x+h \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(-h) = R$$

<u>Demostración</u>:

Sabemos que $P(x) = C(x)\,(x+h) + R$

$P(-h) = C(-h).(-h+h) +R$ siendo P(-h) el valor numérico del polinomio P(x) cuando x = -h

$P(-h) = C(-h) .0 +R$ ya que (-h + h) = 0 por propiedad de la suma de números opuestos

$$\boxed{P(-h) = R}$$

De donde deducimos que:

El resto R de una división de un polinomio en x por un binomio x + h (donde h es un número real cualquiera), es el valor numérico del polinomio dividendo cuando la variable asume el valor (-h).
NOTA: Resulta en consecuencia que:

$$\boxed{P(x) \text{ es divisible por } x+h \Leftrightarrow P(-h) = 0}$$

Regla de Ruffini

Para el cálculo efectivo del cociente C(x), en el caso de división de polinomios que estamos estudiando, resulta útil y cómodo, utilizar el esquema que completarás como ejemplo con la ayuda de tu profesor

$$
\begin{array}{l|l}
5x^4 + 2x^3 + 0x^2 \ \ +x \quad -1 & \ \ x + 2 \\
\cline{2-2}
\underline{-5x^4 - 10x^3 \qquad\qquad} & 5x^3 - 8x^2 + 16x - 31 \\
\quad / \ \ -8x^3 & \\
\quad\ \ \underline{+8x^3+16x^2 \qquad} & \\
\qquad / \ \ 16x^2 & \\
\qquad\ \ \underline{-16x^2 - 32x \qquad} & \\
\qquad\quad / \ \ -31x & \\
\qquad\qquad \underline{+31x + 62 \qquad} & \\
\qquad\qquad\quad / \qquad 61 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x & ti \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 5 & 2 & 0 & 1 & -1 \\
-2 & & .... & .... & .... & .... \\
\hline
 & 5 & .... & .... & .... & ....
\end{array}
$$

PRACTICA

11. Calcula los cocientes indicados (P(x) : Q(x)) en cada enunciado por aplicación de la regla de Ruffini y verifica el resto obtenido, aplicando el teorema del resto

a) $(3x^2 - 2) : (x + 1)$

b) $(2x^5 - 3x^4) : (-1 + x)$

c) $(\frac{1}{3}x^4 - 2x^2 - 3x) : (x - 2)$

d) $(4x^3 - 2x + \frac{1}{3}) : (x + 2)$

e) $(x^5 - 243) : (x - 3)$

f) $(y^4 - 16) : (y + 2)$

12. Determina “m” para que el resto de la división resulte igual a 8

$$\left[m\,x^3 - 2m\,(x^5 - 1) + m\,x^2\right] : (x-1)$$

13. Dada $\left[4\,x^4 - (a-3) + 3\,(a+1)\,x^3\right] : (x+1)$

 a) Calcula “a” de modo que el resto sea 28

 b) Determina, por Ruffini, el cociente de la división asignándole a “a” el valor hallado en el apartado anterior.

14. En cada uno de los siguientes cocientes, determina h de modo que la división posea el resto indicado en cada caso

 a) $\left[h\,x + (5-h)\,x^3 - (2h-1)\right] : (x+1)$, el resto sea (-4)

 b) $\left(h\,x^2 + 5\,h\,x^3 - x^4\right) : (x+2)$, el resto sea (-25)

 c) $\left(h\,x^2 + (3h-12)\,x + 5\,h\,x^3\right) : (x+\frac{1}{5})$, el resto sea $\left(-\frac{3}{5}\right)$

15. En cada una de las siguientes divisiones, determina h de modo que la división resulte exacta.

 a) $(3\,x^4 - 2\,x^2 + h) : (x-1)$

 b) $(5\,x^2 - h\,x) : (x - \frac{2}{5})$

 c) $(2\,h\,x^3 + \frac{3}{5}h\,x^2 - x) : (x+1)$

 d) $(x^3 + h) : (x-3)$

16. Completa el cuadro .

A(x)	A(x) ¿es divisible por (x-2)?	A(x) ¿es divisible por (x+1)?
$4x^3+2\,x^4-10x^2-12x$		
$x\,(x-\frac{3}{2})-1$		
$2\sqrt{2}+x^2+(\sqrt{2}+2)x$		

Ceros de un polinomio y su descomposición en factores

Dado el polinomio A(x)= $x^4 - 2x^3 + 2 - x$, notemos que A(1)=0 y A(2)=0 por lo tanto :

1 y 2 son ceros de A(x)
y en consecuencia
A(x) es divisible por (x-1) y (x-2) .

Entonces de acuerdo al algoritmo de la división resulta:

A(x)= $x^4 - 2x^3 + 2 - x$ =
$(x-1)(1x^3-1x^2-1x-2)$ =
$(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$

	x^4	x^3	x^2	x	ti
	1	-2	0	-1	2
1		1	-1	-1	-2
	1	-1	-1	-2	0
2		2	2	2	
	1	1	1	0	

En general diremos que :

$$\boxed{A(\alpha)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha) \mid A(x) \quad \Rightarrow A(x) = (x-\alpha) \cdot C(x) \quad (*)}$$

<u>PRÁCTICA</u>

17. a) Determina el valor del coeficiente "a" de P(x) para que el resto de la división entre p(x) y (x - 2) sea cero, siendo

$$P(x)= x^4 - a\,x^3 + 3\,x^2 - 2\,x - 8$$

Y luego factoréalo para ese valor de a.

b) Encuentra otro cero de P(x) para ese valor de a

c) Completa la siguiente expresión factoreada de P(x).

P(x)=(x-…..)(x-…..)(……………………)

18. Completa la expresión factoreada de los siguientes polinomios

a) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(\dots\dots)$

b) $2x^2 - x - 1 = (x-1)(\dots\dots)$

c) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(\dots\dots)(\dots\dots)$

Factorear un polinomio es transformarlo en el producto de dos o más polinomios.

Para localizar los ceros de un polinomio se utiliza la siguiente propiedad:

Si el polinomio P(x)= $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots\dots + a_nx^n$ **con** $a_i \in Z \; \forall i$ **y** $a_n = 1$ **,admite la raíz** α **entonces** α **es divisor de** a_0

PRÁCTICA

19. Factorea todo lo posible y halla todos los ceros de cada uno de los siguientes polinomios:

$a(x) = x^3 - 12x^2 + 41x - 30$
$b(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$
$c(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
$d(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2$

20. Dadas las siguientes expresiones de la forma $x^n \pm h^n$ determina los divisores de la forma $x \pm h$ de modo que la división resulte exacta y en ese caso escribir $x^n \pm h^n$ como el producto del divisor por el cociente, o sea factoreado:

a) $x^5 + 32$

b) $x^3 - 8$

c) $x^5 + 1$

d) $a^4 + 16$

e) $y^3 + 64$

f) $b^3 - \frac{1}{27}$

g) $a^2 + 25$

h) $x^4 - 81$

21. Calcula el valor de “a” sabiendo que $\sqrt{3}-1$ es un cero del polinomio

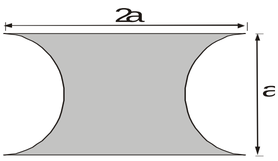
$$p(x) = a\,x^2 - 5\,x + 1$$

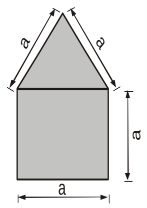
22. Calcula “a” y “b” de modo tal que resulte P(x)=Q(x) , siendo

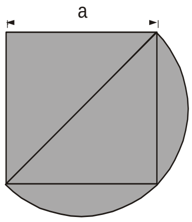
$$P(x)=x^3-3x+2 \qquad y \qquad Q(x)=(x-1)(x+a)(x+b)$$

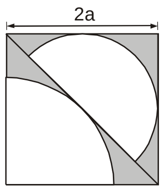
23. El polinomio $P(R;r)= \pi\,(R^2-r^2)$ proporciona el área de una corona circular con radio interior r y radio exterior R . Calcula el área de una corona circular con un radio exterior de 20cm. y uno interior de 10cm.

24. Factorea la fórmula que da el área A de cada una de las regiones sombreadas

a) 

b) 

c) 

d) 

Expresiones algebraicas racionales. Simplificación. Operaciones

Dados dos polinomios P(x) y Q(x) / $Q(x) \neq \overline{0}$ cualquiera sea x a la expresión

$T(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ la denominamos **expresión algebraica racional** donde

$$T(x) = \frac{P(x) \longrightarrow}{Q(x) \longrightarrow} \quad \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$

El valor numérico de esta expresión dependerá del valor que asignemos a la variable para el cual la misma quede definida ,es decir

$$T(a) = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad \forall a \in R \quad \text{con } Q(a) \neq 0$$

NOTA: En lo sucesivo consideraremos que las expresiones algebraicas racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se encuentran definidas para todos aquellos valores de "x" para los cuales $Q(x) \neq 0$

Observaciones

$\forall\ a \in R /\ \ Q(a) \neq 0$ resulta:

a) Si Q(x)=1 $\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = P(x)$

b) Si Q(x)=P(x) $\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)}{Q(x)} = 1$

c) Si P(x)= $\bar{0}$ $\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\bar{0}}{Q(x)} = \bar{0}$

Simplificación de expresiones algebraicas

Dada la expresión $\frac{A(x)}{B(x)}$ .Si es posible transformarla en $\frac{P(x)R(x)}{Q(x)R(x)}$ resulta $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{P(x)R(x)}{Q(x)R(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} . \frac{R(x)}{R(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} .1 = \frac{P(x)}{Q(x)}$; ya que hay un mismo factor en el numerador y en el denominador , tal operación la denominamos **simplificación**

Ejemplo

1) $\frac{a^2 - 1}{a+1} = \frac{(a-1)}{1} . \frac{(a+1)}{(a+1)} = \frac{a-1}{1} = a-1 \qquad \forall \quad a \neq -1$

2) $\frac{21x+7}{9x^2+1+6x} = \frac{7(3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{7}{3x+1} . \frac{3x+1}{3x+1} = \frac{7}{3x+1} \qquad \forall \quad x \neq -\frac{1}{3}$

<u>PRÁCTICA</u>

25. Establece para que valores de la variable están definidas las siguientes expresiones algebraicas racionales.

a) $\frac{3x+2}{x^2-9}$ b) $\frac{2x-5}{3x+\frac{1}{3}}$ c) $\frac{3x+2}{(x+5)^2}$

26. Une con flechas las expresiones equivalentes. Justifica.

a) $\dfrac{3x^2-3}{x^2-2x+1}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{-10}{(x-2)(x+2)}$

b) $\dfrac{x+y(x-2)-2}{y^2-1}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{1-x}{2}$

c) $\dfrac{3x^3+3x^2-3x-3}{x^2+2x+1}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{3(x+1)}{x-1}$

d) $\dfrac{-20x^2y}{2x^4y-8x^2y}$ $\qquad\qquad$ $3(x-1)$

e) $\dfrac{1-x^2}{x^2-2x+1}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{x-2}{y-1}$

f) $\dfrac{x^3-1}{-2x^2-2x-2}$ $\qquad\qquad$ $-\dfrac{x+1}{x-1}$

Operaciones con expresiones algebraicas

Las operaciones con expresiones algebraicas racionales tienen las mismas propiedades que las operaciones con números racionales.

Suma

La suma de expresiones algebraicas racionales puede presentar:

I) denominadores iguales, en este caso:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)+R(X)}{Q(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x-2}{y-1}+\frac{x+3}{y-1}=\frac{x-2+x+3}{y-1}=\frac{2x+1}{y-1}$$

II) denominadores distintos, es decir

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x).S(x)}{Q(x).S(x)}+\frac{R(x).Q(x)}{S(x).Q(x)}=\frac{P(x).S(x)+R(x).Q(x)}{Q(x).S(x)}$$

Un recurso útil será descomponer los denominadores en factores primos y luego determinar el múltiplo común menor de los denominadores como el mecanismo empleado en la determinación del mcm de números enteros.

Ejemplo:

$$\frac{y-2}{y^2-1}+\frac{2}{y-1}=\frac{y-2}{(y-1).(y+1)}+\frac{2}{y-1}=\frac{y-2}{(y-1).(y+1)}+\frac{2.(y+1)}{(y-1).(y+1)}=\frac{y-2+2y+2}{(y-1)(y+1)}=\frac{3y}{y^2-1}$$

Resta

Dadas dos expresiones algebraicas racionales cualesquiera llamamos diferencia de ellas a la expresión algebraica racional que se obtiene sumando a la primera la opuesta de la segunda.

Ejemplo:

$$\frac{2x}{x-1}-\frac{x-x^2}{x^2-2x+1}=\frac{2x}{x-1}-\frac{x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x}{x-1}+\frac{-(x-x^2)}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)+\left[-(x-x^2)\right]}{(x-1)^2}=\frac{3x^2-3x}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{3x}{(x-1)}$$

Multiplicación

Dadas dos expresiones algebraicas racionales cualesquiera definimos la multiplicación de las mismas del siguiente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{D(x)}=\frac{P(x)\cdot R(X)}{Q(x)\cdot D(x)}\qquad \forall x\in R\ /\ Q(x)\neq 0\wedge D(x)\neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{x-a}{x^2-2ax+a^2}.\frac{xy-ay}{x^3-a^3}=\frac{(x-a)(xy-ay)}{(x^2-2ax+a^2)(x^3-a^3)}=\frac{(x-a)y(x-a)}{(x-a)^2(x-a)(x^2+ax+a^2)}=\frac{y}{x^3-a^3}$$

División

Dadas dos expresiones algebraicas racionales cualesquiera llamamos cociente entre ellas a la expresión racional que se obtiene de multiplicar a la primera por el recíproco de la segunda .

<u>Ejemplo</u>:

$$\frac{a-b}{a^2-b^2}:\frac{(a-b)^2}{a+b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}.\frac{a+b}{(a-b)^2}=\frac{1}{(a-b)^2}$$

<u>PRÁCTICA</u>

27. Demuestra

a) $\frac{2a-2}{a^2-9}+\frac{2}{a-3}=\frac{4(a+1)}{a^2-9}$

b) $\frac{2x^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{2x(x-2y)}{(x-y)(x+y)}$

c) $\frac{8a}{2a+2b}+\frac{3b}{a+b}+\frac{4b}{4a+4b}=4$

d) $\frac{1}{a+1}+\frac{a-2}{a^3+1}+\frac{2}{a^2-a+1}=\frac{a+1}{a^2-a+1}$

e) $\frac{3}{2x-2}-\frac{2x}{2x^2-2}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{3}{2(x-1)}$

f) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{x^2}{x^2-1}$

g) $\frac{3}{2(x-2)}-\frac{x}{2x^2-8}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x^2-4}$

h) $\frac{5}{x^2+6x+9}-\frac{1}{3x^2-27}+\frac{4-4x}{x^3+3x^2-9x-27}=\frac{2(x-18)}{3(x+3)^2(x-3)}$

i) $\frac{1+a^2}{1-a^2}-\frac{2-2a}{1+a}+\frac{a+1}{1-a}=\frac{6a}{1-a^2}$

j) $\frac{1}{1+\frac{y}{x}}-\frac{1}{1-\frac{y}{x}}-\frac{y^2+x^2}{x^2-y^2}=\frac{-x-y}{x-y}$

k) $\frac{6(x^2-y^2)}{a^2-b^2}.\frac{6a+6b}{36x-36y}=\frac{x+y}{a-b}$

l) $\frac{a^2-2ab+b^2}{x^2-y^2}.\frac{(y-x)^2}{a-b}=\frac{(a-b)(x-y)}{x+y}$

m) $\frac{-a^2+2ab-b^2}{xa+yb-xb-ya}.\frac{2x-2y}{a^2-b^2}=\frac{-2}{a+b}$

n) $\dfrac{a^2-ab+\frac{1}{4}b^2}{a^2-\frac{1}{4}b^2}\cdot\dfrac{2a+b}{a^2-a-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b}=\dfrac{2}{a-1}$

o) $\dfrac{y^2-6y+9}{ya-3a-yb+3b}\cdot\dfrac{2a^2-2b^2}{y-3}=2(a+b)$

p) $\dfrac{y^3+3y^2+3y+1}{y^3+1}:\dfrac{y^2-1}{y^2-y+1}=\dfrac{y+1}{y-1}$

q) $\dfrac{4x^2-9}{4x^2+12x+9}:\dfrac{4x-6}{-3-2x}=-\dfrac{1}{2}$

r) $\dfrac{a^4-16}{2a^2-a^3+8-4a}:\dfrac{-2a-4}{5bc}=\dfrac{5bc}{2}$

s) $\dfrac{y^3-8}{y^2-4}:\dfrac{-2y^2-4y-8}{\frac{1}{2}y+1}=-\dfrac{1}{4}$

t) $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}=-1$

u) $\left[\dfrac{5}{m-3}+\dfrac{5}{m+3}\right]\cdot\dfrac{\frac{3a}{10m}+\frac{b}{5}}{\frac{1}{m^2-9}}=3a+2bm$

v) $\left[\dfrac{1+y}{1-y}-\dfrac{1-y}{1+y}\right]\cdot\dfrac{y^2+1+2y}{4y-4y^2}=\dfrac{1+y}{(1-y)^2}$

w) $\left\{\dfrac{a-1}{2a}\cdot\left[\dfrac{a+1}{a-1}-1\right]\right\}:\dfrac{1}{ab-a}=b-1$

x) $\left[\dfrac{2}{x^3-1}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right]:\dfrac{(x+1)^2}{x^3-1}=-1$

y) $\dfrac{2b}{2b+2}:\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{b}}\right]=\dfrac{b-1}{2b}$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PLANTEADOS

1. Son polinomios a, c y e.
   El grado de a es 4, el grado de c es 2 y el grado de e es 6.
2. 9,5 centavos; 11 centavos.
3. Área = 175π.
4. a) grado [A(x) + B(x)] = 4 b) grado [A(x).B(x)] = 6
5. a) $A(x) + C(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 + x$
   b) $A(x) + B(x) + C(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 + 2x - 1$
   c) $A(x).B(x) = x^3 - 1$
   d) $B(x).[A(x) + C(x)] = x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x$
   e) $A^2(x) + B^3(x) = x^4 + 3x^3 + 5x$ f) $[A(x) - C(x)] = -x^5 - x^3 + x + 2$

6. a) a = -7 ; b = 12 ; c = 5

b) a = $\frac{1}{2}$; b = $\frac{1}{2}$; c = $\frac{1}{2}$

c) a = $\frac{3}{7}$; b = -$\frac{6}{7}$; c = -$\frac{5}{9}$

d) a = 2 ; c = 1

7. grado del cociente = 3 grado del resto < 4 ó carece de grado .

8. a) $C(x) = x^2 + 2x – 1$ $R(x) = - x –3$

b) $C(x) = x^3 – 3x^2 + 3x – 9$ $R(x) = 2x$

9. verdadero

10. verdadero

11. a- $C(x) = 3x – 3$ $R(x) = 1 = P(-1)$

b- $C(x) = 2x^4 – x^3 – x^2 – x –1$ $R(x) = -1 = P(1)$

c- $C(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$ $R(x) = -\frac{26}{3} = P(2)$

d- $C(x) = 4x^2 – 8x +14$ $R(x) = -83/3 = P(-2)$

e- $C(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81$ $R(x) = 0 = P(3)$

f- $C(x) = y^3 –2y^2 + 4y –8$ $R(x) = 0 = P(-2)$

12. m = 4

13. a) a = -6

b) $C(x) = 4x^3 – 19x^2 + 19x – 19$

14. a) h = 0 b) h = $\frac{1}{4}$ c) h = 5

15. a) h = -1 b) h = 2 c) h = $\frac{5}{7}$ d) h = -27

16.

A(x)	x + a	A(x) ¿es divisible por (x-2)?	A(x) ¿es divisible por (x+1)?
$4x^3+2x^4 –10x^2 –12x$	x + 3	Si	Si
$x\left(x - \frac{3}{2}\right) – 1$	$x + \frac{1}{2}$	Si	NO
$2\sqrt{2} + x^2 + (\sqrt{2}+2)x$	$x - \sqrt{2}$	NO	NO

17. a =2 $P(x) = (x – 2).(x^3 + 3x + 4)$

18.

a) $x^2 – 3x + 2= (x-1)(x-2)$

b) $2x^2 – x -1= (x-1)(2x+1)$

c) $x^3 – 2x^2 –x+2 = (x-2)^2(x+2)$

19.

a(x) = (x – 1)(x – 6)(x – 5)
b(x) = (x – 1)(x – 2)(x + 2)(x + 3)
c(x) = (x – 2)(x + 3)(x + 1)
d(x) = x^2(x – 1)(x + 3)

20.

a- $(x-2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$
b- $(x-2)(x^2+2x+4)$
c- $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$
d- no es posible
e- $(y+4)(y^2-4y+16)$
f- $(b-1/3)(b^2+1/3b+1/9)$
g- no es posible
h- $(x-3)(x+3)(x^2+9)$

21. a = $\frac{3}{2}+2\sqrt{3}$

22. (a = 2 b = -1) $\vee$ (a = -1 b = 2)

23. Área = 300π

24. a) $(8-\pi)\frac{a^2}{4}$ b) $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$ c) $\frac{a^2}{2}(1+\frac{\pi}{2})$ d) $a^2(4-\pi)$

25. a) $\forall$ x $\neq$ 3; -3 b) $\forall$ x $\neq$ -1/9 c) $\forall$ x $\neq$ -5

26.

.

a) $\frac{3x^2-3}{x^2-2x+1}$

b) $\frac{x+y(x-2)-2}{y^2-1}$

c) $\frac{3x^3+3x^2-3x-3}{x^2+2x+1}$

d) $\frac{-20x^2y}{2x^4y-8x^2y}$

e) $\frac{1-x^2}{x^2-2x+1}$

f) $\frac{x^3-1}{-2x^2-2x-2}$

$\frac{-10}{(x-2)(x+2)}$

$\frac{1-x}{2}$

$\frac{3(x+1)}{x-1}$

$3(x-1)$

$\frac{x-2}{y-1}$

$-\frac{x+1}{x-1}$