UN PROBLEMA GEOMÉTRICO COMO MÉTODO PARA MOVILIZAR CONOCIMIENTOS

Có, Patricia
Katz, Raúl.
Departamento Matemática, Escuela de Estadística

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, una de las tendencias predominantes, en el aprendizaje de las matemáticas, es conceder importancia a la resolución de problemas.

Estos problemas deben favorecer tanto la búsqueda de estrategias de soluciones entre los conocimientos ya adquiridos o la elaboración de otros, si estos resultan insuficientes, como así también la integración y asimilación de saberes.

Por otra parte, esta metodología de trabajo, le permite al docente detectar algunos de los errores en los cuales incurren sus alumnos, y a partir de ellos replantear y modificar eventualmente su estrategias.

En lo que sigue se relata a modo de ejemplo el desarrollo de una propuesta tendiente a atender lo dicho y a satisfacer el enfoque propuesto.

PROPUESTA

Dadas las ecuaciones de la siguientes rectas:

$$r_1\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathrm{R} \qquad\qquad r_2\begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 2s \end{cases} \quad s \in \mathrm{R}$$

a) Verificar que son alabeadas.
b) Calcular la mínima distancia entre ellas.
c) Encontrar los puntos de r_1) y r_2) que se hallan a la mínima distancia.

La solución de a) y b) no ofrece dificultades pues los alumnos se limitan a aplicar sobre una situación particular resultados obtenidos en forma general.

Para c) los alumnos utilizan diferentes estrategias que pasamos a relatar.

ESTRATEGIA Nº 1

Un grupo de alumnos analiza el problema a partir de la situación particular en que r_1) y r_2) son ortogonales. Ellos imaginan a una de las aristas del piso del salón como r_1) y a r_2) como la arista del techo que es ortogonal a r_1) (gráfico 1).

Por consiguiente proponen encontrar "el plano" que contiene a r_1) y es perpendicular a r_2), para obtener luego el punto B, de intersección con r_2), y repetir el procedimiento para encontrar el punto A, intersección de r_1) con un plano perpendicular a r_1) que contiene a r_2).

Los alumnos creen que así obtienen los puntos que se halla a la mínima distancia.

Cuando proceden analíticamente encuentran que, con los datos del problema en que r_1) y r_2) no son ortogonales, esos planos no existen.

Esto los desconcierta en primera instancia, pero la observación del gráfico 2, les permite comprender que no siempre existe un plano por una recta y a la vez perpendicular a otra recta alabeada con la primera.

El docente les propone ahora encontrar condiciones necesarias y suficientes (entre rectas alabeadas), bajo las cuales el procedimiento sugerido por ellos tiene validez.

ESTRATEGIA Nº 2

Otros alumnos comienzan la búsqueda de los puntos probando con soluciones tentativas y obtienen una solución "bastante aproximada" después de unos pocos intentos. Logran esta "aceptable" aproximación combinado la observación gráfica con algunos razonamientos (cabe recordar que conocían el valor de la mínima distancia).

A modo de ejemplo mostramos algunos de sus cálculos

t = 0 $\rightarrow$ A = (1,1,1)

s = 0 $\rightarrow$ B = (0,0,0) $\overline{AB} = (-1,-1,-1) \rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3} \cong 1.73$

t = 0 $\rightarrow$ A = (1,1,1)

s = 1/2 $\rightarrow$ B = (1/2,0,0) $\overline{AB} = (-1/2,0,0) \rightarrow \left|\overline{AB}\right| = 0.5$

De esta segunda iniciativa surge por parte del docente la siguiente pregunta: ¿Qué expresión les sería de utilidad para realizar este procedimiento de cálculo repetido, a través de un programa que se ejecute con la computadora?.

A partir de esta pregunta los alumnos obtienen la expresión por componentes y el módulo del vector $\overline{AB}$, en función de los parámetros s y t.

- $\overline{AB}$ =(s-t-1 , 2s-t-1 , 2s-3t-1) (1)
- $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(s-t-1)^2 + (2s-t-1)^2 + (2s-3t-1)^2}$ (2)

Cuando se les sugiere eliminar la raíz de (2), escriben

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = (s-t-1)^2 + (2s-t-1)^2 + (2s-3t-1)^2$$ o equivalentemente

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = 9s^2 + 11t^2 - 18st - 10s + 10t + 3 \qquad (3)$$

La expresión (3) le permite al docente orientar el problema en diferentes direcciones:

* Si sustituyen $\left|\overline{AB}\right|$ *por* $\sqrt{\frac{18}{81}}$ (valor de la mínima distancia entre r_1) y r_2)) o por cualquier otro valor, la expresión (3) se transforma en una ecuación de segundo grado en dos variables.

* Si sustituyen $\left|\overline{AB}\right|^2$ *por* z, y escriben

$$z = 9s^2 + 11t^2 - 18st - 10s + 10t + 3,$$

la expresión (3) se transforma en una ecuación con tres variables o bien en la expresión de una función de dos variables.

El docente encuentra de este modo un medio propicio para introducir el estudio de la ecuación general de segundo grado, para avanzar luego con el estudio de las superficies cuádricas y utilizar estos recursos para resolver el problema, o bien, la posibilidad de estudiar los extremos de una función de dos variables.

No obstante ello, el docente se limita a anticipar esas posibilidades y los alienta en la búsqueda de otras opciones.

Cuando los alumnos son inducidos a leer nuevamente la deducción de la fórmula que les permite evaluar la distancia entre rectas alabeadas, encuentran que esa distancia se obtiene proyectando un vector con extremos en cada recta sobre una dirección perpendicular a ambas. Esto les permite descubrir que los puntos que hacen mínima la distancia entre dos rectas alabeadas se encuentran sobre una dirección perpendicular a ambas.

A partir de esta observación y disponiendo de la expresión (1), plantean el sistema

$\begin{cases} \overline{AB} \times \bar{u} = 0 \\ \overline{AB} \times \bar{v} = 0 \end{cases}$, donde $\bar{u} = (1,1,3)$ y $\bar{v} = (1,2,2)$ son vectores paralelos a r_1) y r_2) respectivamente.

Calculando los productos escalares obtienen el sistema $\begin{cases} 9s - 11t - 5 = 0 \\ 9s - 9t - 5 = 0 \end{cases}$,

cuya solución es $\begin{cases} s = \dfrac{5}{9} \\ t = 0 \end{cases}$.

Algunos alumnos creen que los valores obtenidos son las coordenadas de uno de los puntos buscados y preguntan cómo obtener ahora las coordenadas del otro punto.

La intervención de otros alumnos les permite comprender que esos son los valores de los parámetros, que reemplazados en las respectivas ecuaciones de las rectas determinan los puntos A y B que se buscan.

Una vez encontradas las coordenadas de A = (1,1,1) y B = $(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9})$,

obtienen las componentes de $\overline{AB} = (-\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$

y verifican que $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\frac{18}{81}} \cong 0.47$, valor que ya habían obtenido al calcular la mínima distancia.

Esta forma de trabajar permite que el alumno interactúe dinámicamente con los contenidos, incluyendo el intercambio con sus profesores y compañeros.

Una vez que se avanzó con el desarrollo de los contenidos de la asignatura y finalizado el estudio de la ecuación de segundo grado, se reconsidera el problema desde otro punto de vista.

Los alumnos ahora reconocen que la ecuación:

$$9s^2 + 11t^2 - 18st - 10s + 10t + 3 = \frac{18}{81} \quad (4)$$

es de tipo elíptico, pero creen que necesitan una ecuación adicional para obtener la única solución, que por otra parte ya conocían.

Esto muestra que tienen en claro la unicidad de la solución, pero es evidente que las ecuaciones de tipo elíptico sugieren al alumno elipses propiamente dichas y no los casos particulares de un solo punto o ningún lugar geométrico.

Esto resulta natural si se tiene en cuenta que la ejercitación propuesta para este tema no contempla prácticamente estas situaciones particulares.

Cuando se pregunta qué ocurre en (4) si se sustituye el segundo miembro por un valor menor que $\frac{18}{81}$ (mínima distancia al cuadrado), los alumnos responden que la ecuación resulta incompatible, pues $\sqrt{\frac{18}{81}}$ es la mínima distancia. A partir de esta observación aparecen las posibilidades no contempladas anteriormente.

Por distintos medios, los alumnos reducen la ecuación (4). Algunos utilizan la herramienta computacional, otros plantean $\begin{cases} 9s - 9t = 5 \\ -9s + 11t = -5 \end{cases}$ para obtener s= 5/9 y t= 0 , que son las coordenadas del centro de simetría, y a su vez el único punto que satisface (4).

Los alumnos corroboran luego que el resultado que obtienen coincide con el que obtuvieron a través del otro procedimiento.

Finalizada esta actividad se propone encontrar los puntos de r_1 y r_2 que se encuentran a una distancia d, con $d > \sqrt{\frac{18}{81}}$ (mínima distancia), por ejemplo d = 1.

El planteo para distintos valores de d los lleva a ecuaciones de segundo grado que representan elipses propiamente dichas, con centro de simetría en ($\frac{5}{9}$, 0) (gráfico 3).

El alumno logra comprender con cierta dificultad, que hay infinitos pares de puntos en r_1) y r_2) respectivamente, que realizan esas distancias y que esos pares de puntos se obtienen para aquellos valores de los parámetros s y t que satisfacen la ecuación de la elipse que obtienen en cada caso.

Por otra parte, la representación gráfica de algunas de estas elipses les permite visualizar el intervalo de variación tanto para el parámetro s como para el parámetro t y comprender que estos intervalos de variación para s y t, restringen los puntos que verifican las condiciones del problema a segmentos de rectas en r_1 y r_2 respectivamente.

Además para cada valor del parámetro s obtienen 2 valores del parámetro t (salvo para aquellos valores de s extremos del intervalo), lo cual muestra que para cada punto de r_1 existen dos puntos de r_2 que realizan la distancia propuesta

Al finalizar el estudio de las superficies cuádricas los alumnos reconocen en

$$z = 9s^2 + 11t^2 - 18st - 10s + 10t + 3 \quad (5)$$

la ecuación de una superficie, pero no logran a priori identificarla. A su vez, el profesor les explica que la expresión corresponde a una función de dos variables que expresa la distancia al cuadrado entre los puntos de r_1) y r_2) ,y que con recursos del cálculo diferencial es posible encontrar los valores de s y t para los cuales z es mínima. En términos de nuestro problema es posible encontrar los valores de los parámetros s y t que determinan los puntos de r_1) y r_2) que se encuentran a la mínima distancia.

Cuando los alumnos son inducidos a estudiar las curvas de nivel encuentran que las mismas, en el plano S-T son elipses, algunas de las cuales ya fueron estudiadas y graficadas anteriormente (gráfico 3).

Por otra parte, al interceptar la superficie con los planos paralelos al coordenado SZ y TZ, obtienen parábolas.

Este análisis, más la analogía que encuentran entre la ecuación en estudio y la ecuación reducida del paraboloide elíptico, los lleva a conjeturar que se trata de un paraboloide elíptico cuyo vértice se encuentra fuera del origen de coordenadas (gráfico 4).

La posterior presentación gráfica mediante el uso del computador les permitió corroborar que sus conjeturas habían sido correctas, más aún comprendieron que las coordenadas del vértice V(s,t,z) les permite a través de s y t, encontrar los puntos de r_1 y r_2 que se encuentran a la mínima distancia y a través de $\sqrt{z}$ esa mínima distancia.

Ahora, el nuevo desafío era encontrar las coordenadas del vértice a partir de la ecuación (5). A tal fin se les propone previamente determinar las coordenadas de los vértices de los siguientes paraboloides:

$$z = x^2 + 8y^2$$

$$z = 4x^2 + 8y^2 + 3$$

$$z = 4(x-1)^2 + 8(y+2)^2$$

$$z = 3(x-1)^2 + 8(y+2)^2 + 3$$

Los alumnos dicen que en todos estos ejemplos las coordenadas del vértice se obtienen para aquellos valores de x e y que hacen z mínima, y esto se consigue anulando los cuadrados en que aparecen x e y.

A partir de esta propuesta encuentran que una adecuada transformación de coordenadas en el plano les permitiría convertir la ecuación en estudio en una ecuación del tipo de las propuestas y que esa transformación ya la habían realizado.

En los que sigue se relatan los procedimientos que se utilizaron para que los alumnos comprendieran “aproximadamente” la resolución del problema con los recursos propios del análisis matemático, recursos que les eran desconocidos.

Partiendo de la función de dos variables

$$f(s,t) = 9s^2 + 11t^2 - 18st - 10s + 10t + 3 \qquad (6)$$

los alumnos no tienen dificultades en comprender que para cada valor de s, por ejemplo s=1, (6) se convierte en una función univariada de la forma

$$g(t) = f(1,t) = 11t^2 - 8t - 1$$

que expresa la distancia al cuadrado entre los puntos de r_1 y el punto B de r_2 que se corresponde con el parámetro s=1, y que por otra parte g´(t)=0 les permite encontrar el valor de t para el cual se obtiene el punto $A \in r_1$, más próximo al punto $B \in r_2$.

También comprenden que es posible encontrar una función del parámetro s que exprese la distancia al cuadrado entre un punto fijo de r_1 y los puntos de r_2.

Luego de realizar estos cálculos, primero para algunos valores prefijados de s y después para otros valores prefijados de t, aceptan con naturalidad las condiciones

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 22t - 18s + 10 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial s} = 18s - 18t - 10 = 0$$

o equivalentemente $\begin{cases} -9s + 11t = -5 \\ 9s - 9t = 5 \end{cases}$

como condiciones necesarias para encontrar los extremos de esa función de dos variables.

Por otra parte los alumnos reconocen en este sistema el mismo sistema que obtienen cuando plantean $\begin{cases} \overline{AB} \times \bar{u} = 0 \\ \overline{AB} \times \bar{v} = 0 \end{cases}$ con el primer procedimiento, como así también el sistema que resuelven para encontrar el centro de simetría de la cónica.

COMENTARIOS FINALES

La esencia de esta metodología de trabajo radica en la discusión que se genera a partir del planteo de un problema. En diferentes instancias el docente guía a sus alumnos a través de una serie de preguntas, cada una de las cuales exige no sólo la reproducción de sus conocimientos, sino la realización de una pequeña búsqueda de una "respuesta inteligente" a la pregunta formulada.

De este modo, el estudiante es sometido a tareas que le permiten no sólo asimilar de manera significativa los conocimientos sino también incorporar nuevos procedimientos, transformándose así, en un protagonista de su aprendizaje.

Nos queda la deuda de presentar este problema desde el punto de vista del Algebra Lineal.

El estudio de las formas cudráticas permitiría encuadrar el problema en la búsqueda de valores extremos de una forma cuadrática, tarea que se simplifica con los procesos de diagonalización.

Este tema es objeto de estudio de un segundo curso de Algebra y Geometría.

BIBLIOGRAFÍA

SCHOENFELD, Alan H. Ideas y tendencias en la resolución de problemas OMA.

HERNANDEZ FERNANDEZ, Herminia – DELGADO RUBI, Juan Raúl – FERNANDEZ DE ALAIZA, Bertha – PEREZ PANTALEON, Guillermo – CALDERON AIROSA, Regia (1997): Didáctica de la Matemática – Universidad Tecnológica Nacional. Proyecto FOMEC 630.

ANEXO

GRÁFICO 1

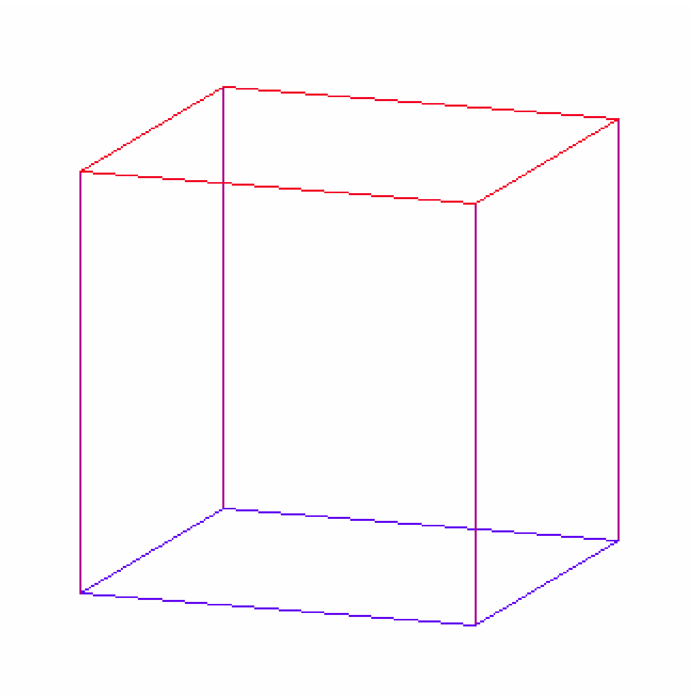

GRÁFICO 2

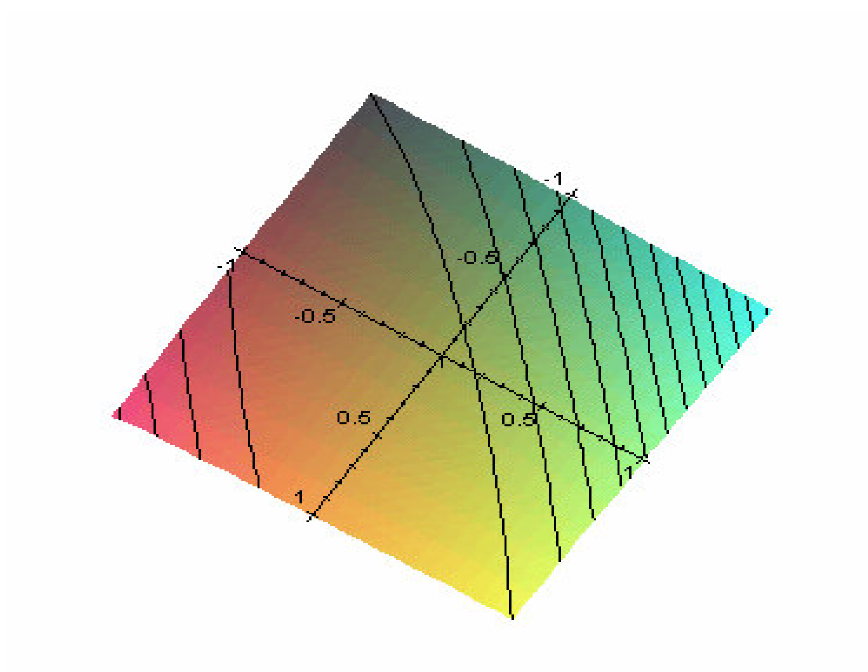

GRÁFICO 3

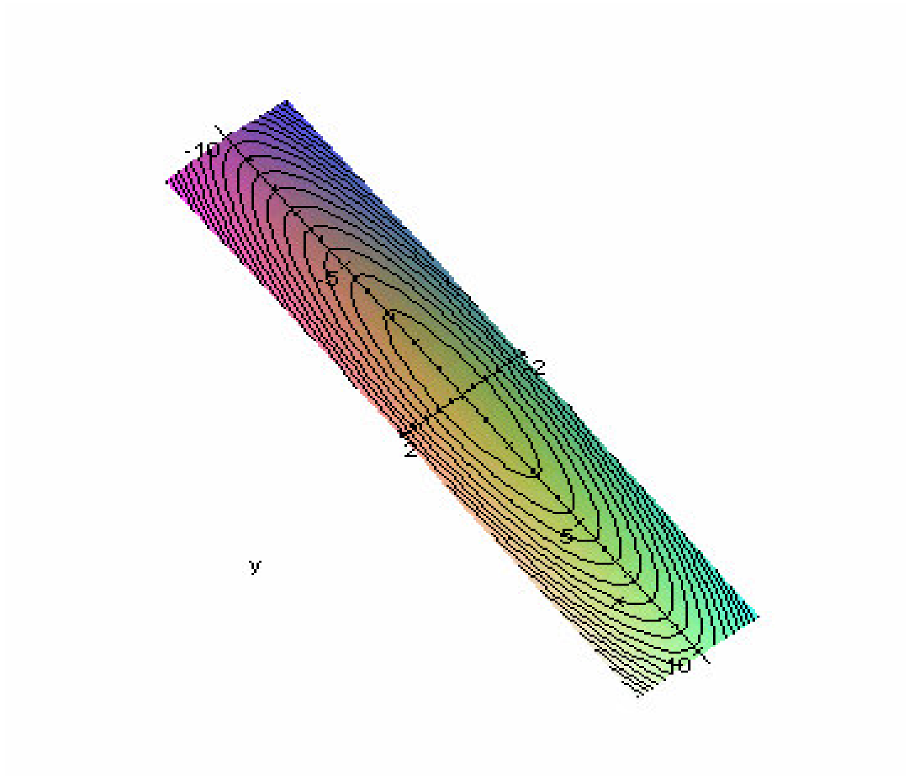

GRÁFICO 4