

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Números Complejos

4º Año

Matemática

Cód. 1404-17

Mirta Rosito

Verónica Filotti

Juan Carlos Bue

Dpto. de Matemática



Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS



Los Números Complejos. Una ampliación más en el campo numérico

La necesidad de crear nuevos conjuntos numéricos (enteros, racionales, irracionales), fue surgiendo a medida que se presentaban situaciones que no tenían solución dentro de los conjuntos numéricos ya conocidos.

Problema

1) Resuelve las siguientes ecuaciones, indicando a qué conjunto numérico pertenecen sus soluciones N(naturales) : Z(enteros) : Q(racionales) ; I(irracionales) .

a) $3x + 5 = 11$

b) $\frac{1}{x} = \frac{-3}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{5} - x = \frac{6}{5}$

d) $\sqrt{3} + x = 1$

e) $x^2 = \frac{25}{4}$

f) $\frac{x - \frac{1}{7}}{-2} = \frac{1}{3}$

Un desafío:

Encuentra los valores de “x” que hacen cierta la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0.$$

¿Es posible encontrar en los conjuntos numéricos que conoces algún número “x” que verifique la ecuación? ¿Por qué?

En el siglo XVIII, el matemático Euler introdujo el símbolo **i** (inicial de la palabra latina imaginarius) para nombrar un número cuyo cuadrado es igual a -1

Se define entonces el número **i**, al que llamamos **unidad imaginaria**, como aquel cuyo cuadrado es (-1).

Es decir: $i^2 = -1$

Luego las soluciones de la ecuación $x^2 = -1$ son:

$x = i$ pues $i^2 = -1$ o $x = -i$ pues $(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = -1$

Números Complejos

Matemática

Más desafíos

Resolvamos la siguiente ecuación:

$$x^2 + c = 0$$

$$x^2 = -c$$

✓ Si $c \leq 0$ $x = \pm\sqrt{-c}$

✓ Si $c > 0$ $x^2 = -(\sqrt{c})^2$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 = -1$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right) = \pm i \quad \text{Luego } x_{1;2} = \pm \sqrt{c} i$$

Problema

2) Determina las soluciones de :

a) $x^2 + 25 = 0$

b) $x^2 + 5 = 4x$

Una ampliación más del campo numérico: Los números complejos

Llamamos números complejos a los números de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e i la **unidad imaginaria**.

Si Z es un número complejo resulta: $Z = a + bi$

es la componente real
 $\text{Re}(Z)$

es la componente imaginaria
 $\text{Im}(Z)$

Definimos al conjunto de los números complejos:

$$C = \{Z / Z = a + bi, a \in R; b \in R; i^2 = -1\}$$

Un complejo expresado de la forma $Z = a + bi$ se la conoce con el nombre de **forma binómica** del complejo Z



Por ejemplo, el número complejo: $Z = -3 + 0,4i$ tiene $\text{Re}(Z)=-3$ e $\text{Im}(Z)=0,4$

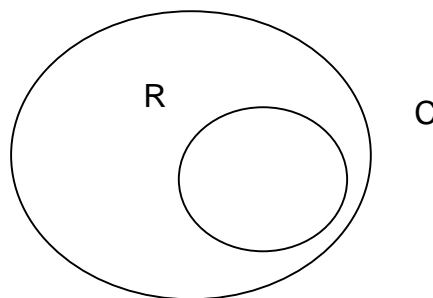
Problema

3) Completa el siguiente cuadro

Z_i	Forma binómica del Z_i	$\text{Re}(Z_i)$	$\text{Im}(Z_i)$
Z_1	$5 - \frac{1}{2}i$		
Z_2		-1	π
Z_3		0	$\frac{3}{4}$
Z_4		11	0

Observaciones

- ❖ Si $Z=a+bi$ y $a=0$ $Z= bi$ recibe el nombre de **imaginario puro**
- ❖ Si $Z=a+bi$ y $b=0$ $Z=a$. En este caso el número complejo, cuya componente imaginaria es nula es **un número real**. Notemos entonces que el conjunto de los números reales es un subconjunto del de los números complejos



- ❖ Dos números complejos son **iguales** si son respectivamente iguales sus componentes reales e imaginarias

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Problema

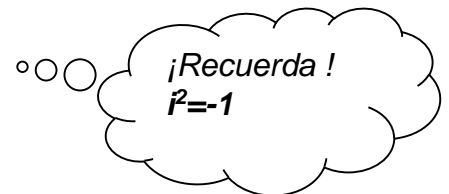
4) Determina x e y pertenecientes al conjunto de los números reales de modo que $Z_1=Z_2$

$$\text{siendo } Z_1=x+y-(2x+y)i \quad Z_2=-x+(1+y)i+3$$

Operaciones con números complejos. Propiedades

Propuesta de trabajo: Resuelve la adición y multiplicación de los siguientes números complejos teniendo en cuenta que se expresan como binomios y tú ya sabes operar con ellos .

$$\text{Dados } Z=a+bi \quad W=c+di$$



Adición

$$Z+W=(a+bi)+(c+di)=\dots\dots\dots$$

Multiplicación

$$Z.W=(a+bi).(c+di)=\dots\dots\dots$$



Propiedades

Adición

Multiplicación

$$Z \in \mathbb{C}; W \in \mathbb{C}; V \in \mathbb{C}$$

$$Z+W=W+Z$$

Conmutativa

$$Z \cdot W = W \cdot Z$$

$$(Z+W) + V = Z + (W + V)$$

Asociativa

$$(Z \cdot W) \cdot V = Z \cdot (W \cdot V)$$

$$\forall Z \in \mathbb{C}; \exists 0 \in \mathbb{C} / Z + 0 = Z$$

Existencia de elemento neutro

$$\forall Z \in \mathbb{C}; \exists 1 \in \mathbb{C} / Z \cdot 1 = Z$$

$$\forall Z \in \mathbb{C}; \exists (-Z) \in \mathbb{C} / Z + (-Z) = 0$$

*-Z se denomina **opuesto** de z*

Existencia de elemento inverso

$$\forall Z \neq 0 \in \mathbb{C}; \exists Z^{-1} \in \mathbb{C} / Z Z^{-1} = 1$$

*Z^{-1} se denomina **recíproco** de z*

Distributiva del producto con respecto a la adición

$$(Z+W) \cdot V = Z \cdot V + W \cdot V$$

Resta de números complejos

Dados $Z=a+bi$, $W=c+di$ definimos :

$$Z - W = Z + (-W) = (a+bi) + (-c-di)$$

Conjugado de un número complejo

Si $Z = a + bi$, llamamos conjugado de Z y lo notamos \bar{Z} al complejo $\bar{Z} = a - bi$

Propiedades del conjugado de un número complejo

Sean $Z=a+bi$ y $W=c+di$

- ❖ $\overline{\overline{Z}} = Z$
- ❖ $Z + \overline{Z} = 2a$
- ❖ $Z - \overline{Z} = 2bi$
- ❖ $Z \cdot \overline{Z} = a^2 + b^2$ (Número real que recibe el nombre de **norma** del complejo Z)
- ❖ $\overline{Z \pm W} = \overline{Z} \pm \overline{W}$
- ❖ $\overline{Z \cdot W} = \overline{Z} \cdot \overline{W}$

Problemas

5) Demuestra las propiedades del conjugado de un número complejo

6) Dados los complejos: $Z_1 = 2 + 3i$; $Z_2 = -2 - \frac{1}{2}i$; $Z_3 = -9$

Calcula: a) $Z_1 + Z_2 =$ b) $Z_1 \cdot Z_2 =$ c) $\overline{Z_1} + Z_2 \cdot Z_3 =$

d) $Z_1^2 - Z_2 =$ e) $(-Z_1 + \overline{Z_3})(-Z_2) =$ f) $Z_2 - \sqrt{Z_3} \left(\frac{1}{2} - Z_1 \right) =$

Nota: en operaciones combinadas con números complejos al resolver \sqrt{a} con $a < 0$ considera sólo la solución positiva

7) Averigua que número complejo no nulo verifica que la suma entre el duplo de dicho número y el cuadrado de su conjugado da por resultado cero.

Para pensar

Dados $Z=a+bi$ $W= c+di$

¿Cómo resolver el **cociente de números complejos**?

En símbolos :

$$\frac{Z}{W} = \frac{a+bi}{c+di} = ?$$

Te proponemos completar el siguiente procedimiento, teniendo en cuenta que el producto de un complejo por su conjugado (norma de un complejo) es un número real :



$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} \cdot \frac{\overline{\overline{W}}}{\overline{W}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \cdot \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots =$$

Ejemplo:

$$\frac{1-3i}{2+2i} = \frac{1-3i}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{(1-3i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} =$$

Problema

8) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2i}{x} = 3-i$

b) $1 + \frac{i}{1+i} = \sqrt{-16} \cdot x$

c) $\frac{-i}{\frac{1}{2}-x} = (1+i)^2$

d) $5 - (-3+2i) = \frac{x}{4i}$

La unidad imaginaria y un producto que genera un ciclo

$i^0 = 1$ (por definición)

$i^6 = \dots\dots\dots$

$i^1 = i$

$i^7 = \dots\dots\dots$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

$\dots\dots\dots$

$i^4 = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$i^5 = \dots\dots\dots$

$i^n = ? \quad n \in N_0$

Para resolver este problema recordemos que por aplicación del algoritmo de una división entera resulta:

$$i^n = i^{4c+r} \stackrel{(1)}{=} i^{4c} i^r \stackrel{(2)}{=} (i^4)^c \cdot i^r \stackrel{(3)}{=} 1^c \cdot i^r = i^r \quad \left| \begin{array}{l} n \quad \underline{4} \\ r \quad c \end{array} \right. \quad 0 < r < 4 \wedge r \in N_0$$

- (1) producto de potencias de igual base
- (2) potencia de otra potencia
- (3) potencia de la unidad imaginaria

$$\left. \begin{array}{l} n \quad \underline{4} \\ r \quad c \end{array} \right| \quad n=4c+r$$

Luego:

$$i^n = i^r \quad \text{con} \quad 0 < r < 4 \wedge r \in N_0$$

Números Complejos

Matemática

De donde

Si llamamos P al conjunto de todas las potencias de i es:

$$P = \{1; i; -1; -i\}$$

Problemas

9) Calcula: a) $i^{431} =$ b) $i^{1224} =$ c) $i^{779} =$

10) Determina:

a) el conjugado de $X / i^{421} + \frac{1}{2X} = i\sqrt{-25}$

b) (-W) si $W + (i - 2)^{-3} + i^{1231} = 0$

c) X si $\frac{3-i}{X} = i^{421}$

11) El producto entre un complejo y su conjugado es 80. Si la componente real es 4. ¿Cuál es la otra componente?

12) La suma de dos complejos conjugados es 10 y el producto es 34. ¿Cuáles son los complejos?

13) Calcula: $\frac{1}{i}; \frac{1}{i^2}; i^{-9}$

14) Determina el valor de x real para que el producto:

$$(2 - 5i) \cdot (3 + xi)$$

- a) sea imaginario puro
- b) sea un número real

15) Escribe un número complejo tal que:

- i) su parte real sea el doble de su parte imaginaria
- ii) su parte real sea la cuarta parte que su parte imaginaria
- iii) sea un imaginario puro y su parte imaginaria sea un número irracional comprendido entre 5 y 6

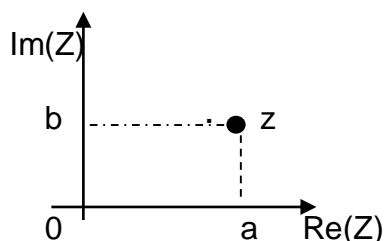
Representación gráfica de los números complejos.

Vimos que la recta quedó completa con los números reales, entonces, para representar números complejos, deberemos recurrir al plano.

El número complejo $Z = a + bi$ se representa en el plano mediante el punto de coordenadas (a; b). El eje de las abscisas se llama eje real y el de las ordenadas, eje imaginario. De



esta forma, a cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.



Problema

16) Representa los siguientes números complejos:

$$Z_1 = 3 + 2i$$

$$Z_2 = -2 + 4i$$

$$Z_3 = \frac{1}{2} - i$$

$$Z_4 = -3i$$

$$Z_5 = -3 - 2i$$

$$Z_6 = 3$$

Observación: cada punto del plano $P(a; b)$ determina un vector posición $\vec{OP} = (a; b)$, a partir de allí establecemos que a cada complejo de la forma $a + bi$ le corresponde un vector posición de extremo P. Entonces, llamamos módulo de un complejo al módulo del vector que lo representa

Problemas

17) Siendo: $W = 2 - i$

a) Calcula su módulo. ¿Qué relación vincula al módulo de un complejo con su norma?

b) Representa en el plano complejo W ; $(-W)$; \overline{W} ; $2W$

18) Siendo: $z = \frac{3k - ki}{1 - 3i}$, determina $k \in \mathbb{R}$ para que $|z| = 10$

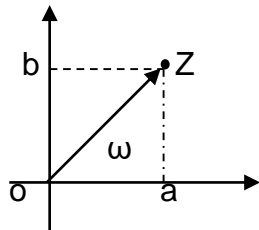
19) La suma de dos complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números complejos?

Argumento de un complejo: se llama argumento del complejo Z a la medida del ángulo ω , formado por el semieje positivo de las abscisas y la semirrecta de origen o que contiene al punto que representa el complejo.

Números Complejos

Matemática

En símbolos
 $\arg(z) = \omega$



Como ω puede tomar infinitos valores, consideraremos como **argumento principal** a aquel que verifique $0 \leq \omega < 360^\circ$

Para determinar el argumento de $z = a + bi$, debe tenerse en cuenta que

$$\text{Si } a \neq 0; \text{tg } \omega = \frac{b}{a}$$

$$\text{Si } a = 0; \begin{cases} b > 0 \Rightarrow \omega = \frac{\lambda}{2} \\ b < 0 \Rightarrow \omega = \frac{3\lambda}{2} \end{cases}$$

Problemas

20) Determina el argumento principal de los siguientes complejos:

$$Z = 1 + i$$

$$W = -1,5$$

$$V = 0,5 - 3i$$

21) Representa gráficamente los números complejos z tal que: $z - \bar{z} = i$.

22) Si $A = \left\{ z \in \mathbb{C} / \text{Re}[z] \leq 1 \wedge 0 < \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$, decide si los siguientes complejos

pertenecen a A . Justifica tu respuesta:

a) $z = 1 + i$

b) $v = 0,5$

c) $w = 0,5i$

Forma polar de un número complejo

$$\text{Si } Z = a + bi = |Z|_{\omega} \quad 0^\circ \leq \omega < 360^\circ$$

Forma polar del complejo Z

Problema

23) Escribe en forma polar los complejos del problema 19



Forma trigonométrica de un complejo

Sabiendo que: $\operatorname{sen} \omega = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \operatorname{sen} \omega$

$$\operatorname{cos} \omega = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \operatorname{cos} \omega$$

resulta que: $Z = a + bi = |z| \cdot \operatorname{cos} \omega + |z| \cdot \operatorname{sen} \omega i = |z| \cdot (\operatorname{cos} \omega + i \operatorname{sen} \omega)$

Esta última expresión se conviene en escribir, por razones de simplicidad:
 $|z| \operatorname{cis} \omega$

Resumiendo

Tres formas de expresar a un número complejo Z

$$Z = \underbrace{a + bi}_{\text{formabinómica}} = \underbrace{|z|}_{\text{formapolar}} \underbrace{(\operatorname{cos} \omega + i \operatorname{sen} \omega)}_{\text{forma trigonométrica}} = \overbrace{|z| \operatorname{cis} \omega}^{\text{forma trigonométrica}}$$

El producto y el cociente de números complejos en forma trigonométrica y en polar

Desafío:

Demuestra que dados $z_1 = \rho_1 \omega_1$ y $z_2 = \rho_2 \omega_2$ resulta:

a) $(\rho_1 \omega_1)(\rho_2 \omega_2) = (\rho_1 \cdot \rho_2)_{(\omega_1 + \omega_2)} = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\omega_1 + \omega_2)$

b) $(\rho_1 \omega_1)^n = \rho_1^n \omega_1^n = \rho_1^n \operatorname{cis}(n \omega_1)$

c) $\frac{\rho_1 \omega_1}{\rho_2 \omega_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \omega_1 \omega_2^{-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\omega_1 - \omega_2) \quad \text{con } \rho_2 \omega_2 \neq 0$

Problemas

24) Expresa en forma polar y trigonométrica:

- el opuesto de $(-1 - i)$
- el conjugado de $(2 - i)$

25) Expresa en forma binómica los complejos

a) $3 \underset{7}{1} \frac{-\pi}{7}$

b) $1 \underset{6}{1} \frac{-\pi}{6}$

26) Dados los complejos: $Z = 1 - 3i$ $W = 5 \underset{2}{1} \frac{-\pi}{2}$ $V = 3 \text{ cis } 180^\circ$

Expresa previamente en forma binómica y luego, calcula:

- $Z \cdot W - V$ (escribe el resultado en forma polar)
- $W : V$
- $W - Z + 2V$ (escribe el resultado en forma trigonométrica)

27) Dado el complejo: $Z = 2 \underset{3}{1} \frac{\pi}{3}$

Escribe el conjugado de Z en forma binómica y representa gráficamente el opuesto de Z

28) Describe dónde se localizan en el plano complejo todos los números que poseen:

- a) parte real igual a 1
- b) parte imaginaria igual a 1
- c) módulo igual a 3
- d) argumento igual a 180°

29) Contesta Verdadero o Falso. Justifica tu respuesta.

- a) ningún número complejo es igual a su conjugado
- b) ningún número complejo es igual a su opuesto
- c) los complejos: $z = -6 + 6i$ y $w = 6\sqrt{2} \underset{315^\circ}{1} \frac{\pi}{315}$ son opuestos
- d) el producto de dos números complejos imaginarios puros es un número complejo imaginario puro.
- e) $(-2\sqrt{2}i)$ es solución de la ecuación $x^3 + 8x = 0$

Y más problemas!!!!

30) Determina los números complejos z , que verifican las siguientes condiciones:



$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(z + \frac{1}{z} \right) \in \mathbb{R} \\ \text{b)} & z + \bar{z} \cdot \text{Im}[z] = 1 \\ \text{c)} & z - z \cdot \text{Re}[z] = -i \\ \text{d)} & z \cdot \text{Re}[z] = z \cdot \text{Im}[z] \\ \text{e)} & \frac{\text{Im}[z]}{z} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \end{aligned}$$

31) Resuelve los siguientes sistemas en los que z y w son números complejos.

$$\text{a)} \begin{cases} zi + (1+i) \cdot w = 2i \\ (1+i) \cdot z + (5-i) \cdot w = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} (1+i) \cdot z + (3-i) \cdot w = 5i \\ z - wi = 2 + 3i \end{cases}$$

32) Determina el $z + \frac{1+i}{2-2i} = \sqrt{2}_{45^\circ}$

33) El cociente de dos números complejos es 5_{20° y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos.

34) Dados: $z_1 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$; $z_2 = -\sqrt{3}i$; $z_3 = 5_{\frac{\pi}{6} \text{ rad}}$, Calcula:

a. en forma polar: z_1, z_2

b. en forma trigonométrica: $\frac{z_1}{z_3}$

c. en forma binómico: $(z_1 + z_2) \cdot z_3$

d. el argumento de w si $w = \frac{\frac{1}{2}z_1 + \sqrt{2}}{z_2}$

35) Expresa en forma trigonométrica

$$\text{a)} z_1 / z_1^{-1} = \frac{1}{-2+i}$$

$$\text{b)} -z_2 / z_2 - 1 = 2+i$$

36) Representa en el plano complejo:

$$A = \{z / z \in \mathbb{C} \wedge |z| = 7\}$$

$$B = \left\{x / x \in \mathbb{C}, \arg x = \frac{\pi}{6} \wedge |x| = 5\right\}$$

$$C = \{y / y \in \mathbb{C} \wedge 2 \leq |y| < 5\}$$

$$D = \left\{y / y \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{4} \leq \arg y < \frac{3}{4}\pi \wedge 1 \leq |y| < 4\right\}$$

37) Determina el complejo Z en las siguientes ecuaciones .

$$a) \left[3(Z+i) - 4\bar{Z} + i \right] (2+3i) = 47 - 40i$$

$$b) Z(2+3i) - \bar{Z}(4+2i) = Z - (5+5i)$$

$$c) \frac{\bar{Z} + (2+3i)^2 + Z}{3+3i} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$$

38) ¿Se verifica la siguiente igualdad?

$$z^{-1} = \frac{2\bar{z}}{z^2 + (\bar{z})^2 - (z - \bar{z})^2}$$

39) Demuestra que :

$$a) \left. \begin{array}{l} W = 4_{30^\circ} \\ Q = 3_{60^\circ} \\ Z = 2_{-50^\circ} \end{array} \right\} \Rightarrow (z^{-1} \cdot \bar{Q})^{-1} \cdot 3\bar{Z} = 4_{60^\circ}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} W = 4_{30^\circ} \\ Q = 3_{60^\circ} \\ Z = 2_{-50^\circ} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{W} : (\bar{Q} : z^{-2})^2 : (Q^2 \cdot Z^3)^{-1} = 2_{260^\circ}$$

40) Determina el ángulo que forman el conjugado de un número complejo con su recíproco.



Bibliografía

Apunte IPS "Números Complejos". Código 1252
 Matemática. Polimodal. Números y Sucesiones de Silvia Altmar, Claudia R Comparatore y
 Liliana Kurzrock. Editorial Longseller. Libro 3

Resolución de los problemas propuestos: **Prof. Juan Carlos Bue.**

Respuesta a los problemas presentados

- 1) a) $x=2$ pertenece a: N; Z; Q. b) $x=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ pertenece a: I
 c) $x=-1$ pertenece a: Z; Q d) $x=1-\sqrt{3}$ pertenece a: I
 e) $x=\pm\frac{5}{2}$ pertenece a: Q. f) $x=-\frac{11}{21}$ pertenece a: Q

- 2) a) $x=\pm 5i$ b) $x_1=2+i$ $x_2=2-i$

3)

Z_i	Forma binómica del Z_i	$\text{Re}(Z_i)$	$\text{Im}(Z_i)$
Z_1	$5 - \frac{1}{2}i$	5	$-\frac{1}{2}$
Z_2	$-1 + \pi i$	-1	π
Z_3	$\frac{3}{4}i$	0	$\frac{3}{4}$
Z_4	11	11	0

- 4) $x=\frac{7}{2}$ $y=-4$

5) A cargo del alumno

- 6) a) $\frac{5}{2}i$ b) $-\frac{5}{2}-7i$ c) $20+\frac{3}{2}i$ d) $-3+\frac{25}{2}i$ e) $-\frac{41}{2}-\frac{23}{2}i$ f) $-11+4i$

- 7) $Z=1+\sqrt{3}i \vee Z=1-\sqrt{3}i$

Números Complejos

Matemática

8) a) $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ b) $\frac{1}{8} - \frac{3}{8}i$ c) 1 d) $8+32i$

9) a) $-i$ b) 1 c) $-i$

10) a) $\bar{X} = -\frac{5}{52} - \frac{1}{52}i$ b) $-W = -\frac{2}{125} - \frac{136}{125}i$ c) $X = -1 - 3i$

11) $b = \pm 8$

12) $z = 5 + 3i$; $t = 5 - 3i$

13) a) $-i$ b) -1 c) $-i$

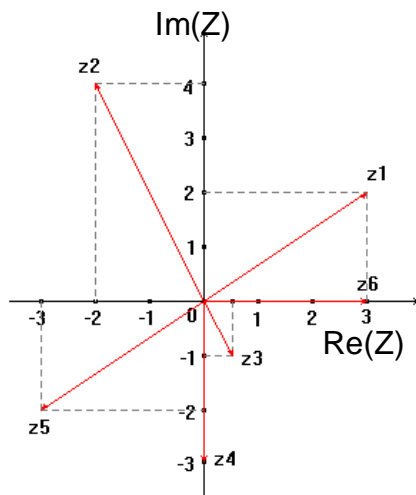
14) a) $x = -\frac{6}{5}$ b) $x = \frac{15}{2}$

15) i) $2 + i$; $4 + 2i$ entre otros. (Existen infinitas posibilidades)

ii) $2 + 8i$; $3 + 12i$ entre otros. (Existen infinitas posibilidades)

iii) $\sqrt{29}i$; ai donde $a = 5,12122122212222\dots$ entre otros. (Existen infinitas posibilidades)

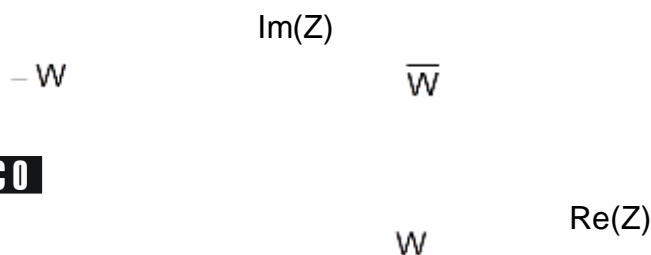
16)

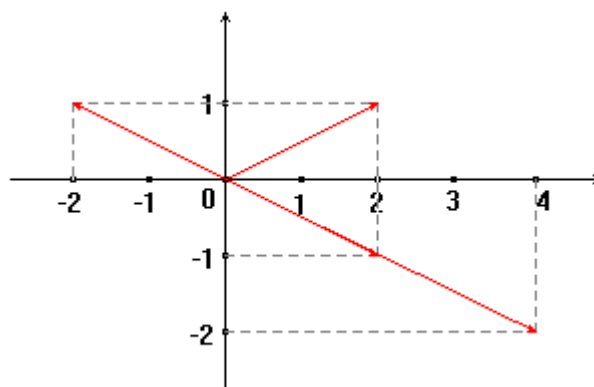


17) a) $|W| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

El módulo al cuadrado de un complejo es igual a su norma.

b)





18) $k = \pm 10$

19) $z = 4 + 3i \quad \vee \quad z = 4 - 3i$

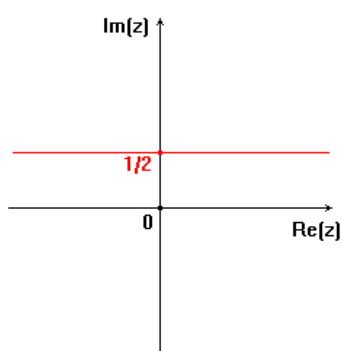
20) a) $\text{tg } \omega = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \omega = 45^\circ$

b) $\text{tg } \omega = \frac{0}{-1,5} = 0 \Rightarrow \omega = 180^\circ$ pues $a < 0$

c) $\text{tg } \omega = \frac{-3}{\frac{1}{2}} = -6 \Rightarrow \omega = 279^\circ 27' 44'',3$

21) Son $Z = a + \frac{1}{2}i ; \forall a \in \mathbb{R}$

- 22) a) $Z \in A$
 b) $V \notin A$
 c) $W \in A$



23) a) $Z = \sqrt{2} 45^\circ$

b) $W = 1,5 180^\circ$

c) $V = \frac{\sqrt{37}}{2} 279^\circ 27' 44'',3$

24) a) Forma Polar: $Z = \sqrt{2} 45^\circ$ Forma Trigonométrica: $\sqrt{2} \text{ cis } 45^\circ$

b) Forma Polar: $Z = \sqrt{5} 26^\circ 33' 54'',18$ Forma Trigonométrica: $\sqrt{5} \text{ cis } 26^\circ 33' 54'',18$

25) a) $Z = 2,7 + 1,3i$ b) $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

26) $Z \cdot W - V = \sqrt{349} 15^\circ 31' 26'',8$

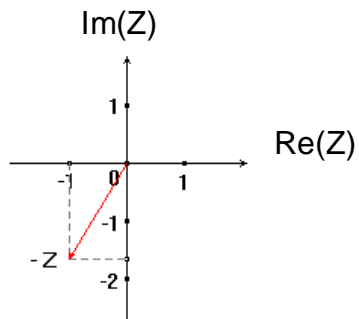
$W : V = -\frac{5}{3}i$

Números Complejos

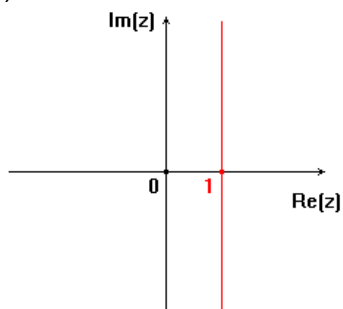
Matemática

$$W - Z + 2V = \sqrt{113} \text{ cis } 131^\circ 11' 9'' ,33$$

27) $\bar{Z} = 1 - \sqrt{3}i$

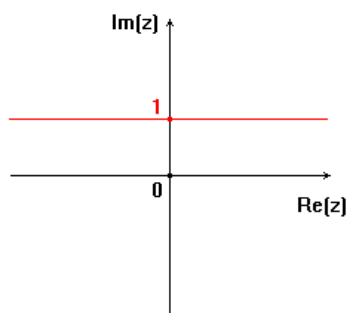


28) a) $Z = 1 + bi$



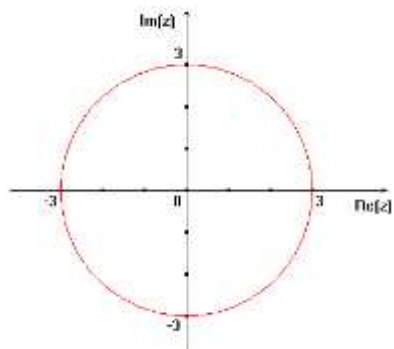
Recta paralela al eje imaginario que corta al eje real en 1

b) $Z = a + i$



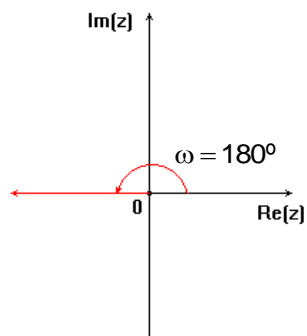
Recta paralela al eje real que corta al eje imaginario en 1

c) $|Z| = 3$



Sobre la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio 3 unidades

d) $Z = |Z|_{180^\circ}$



Sobre el semieje real negativo

29) a) Falso, Ej. $Z=2=\bar{Z}$

b) Falso, Ej. $Z=0$

c) Verdadero

f) Falso, Ej. $(2i)(3i) = -6$ no es un imaginario puro

e) Verdadero



30) Siendo $Z = a + bi$

a) $(b=0 \wedge a \neq 0) \vee |Z|=1$

b) $Z_1 = 1 \vee Z_2 = \frac{1}{2} + i$

c) $Z = -i$

d) $Z = a + ai ; \forall a \in \mathbb{R}$ e) no existe z

31) a) $Z = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i ; W = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$

b) $Z = 2 + \frac{7}{2}i ; W = \frac{1}{2}$

32) $Z = 1 + \frac{1}{2}i$

33) $|Z| = |W^2| = 25$ y $\text{Arg}(Z) = \text{Arg}(W^2) = 40^\circ ; |W| = 5$ y $\text{Arg}(W) = 20^\circ$

34) a) $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{3} \angle 330^\circ$

b) $0,4 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$

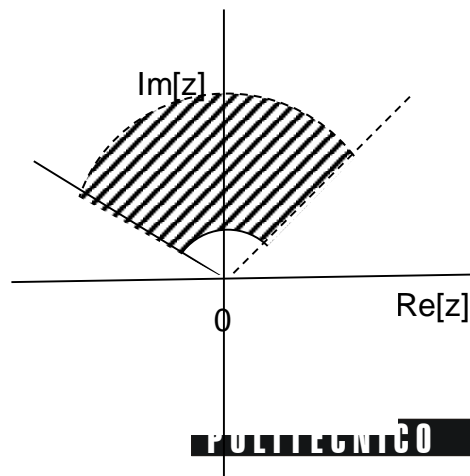
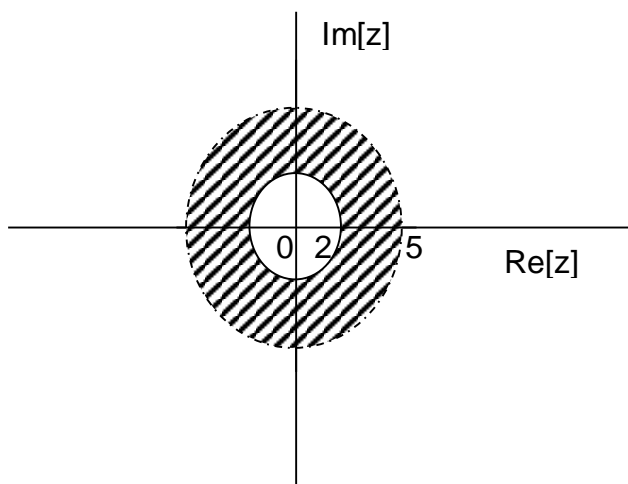
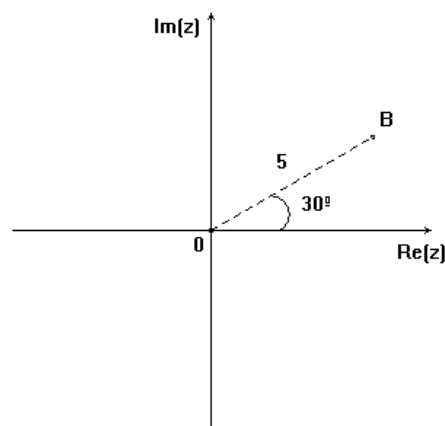
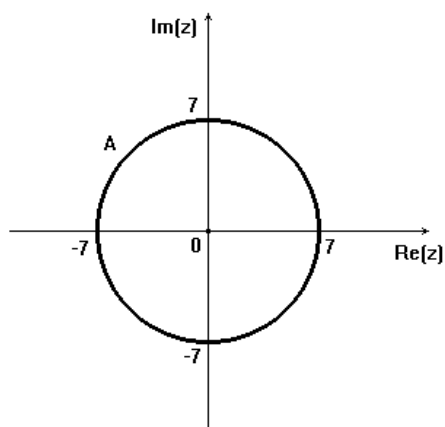
c) $\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i$

d) $\arg(w) = 114^\circ 20' 34''$

35) a) $Z_1 = \sqrt{5}(\cos 153^\circ 26' 5'' + i \sin 153^\circ 26' 5'')$

b) $Z_2 = \sqrt{10}(\cos 198^\circ 26' 5'' + i \sin 198^\circ 26' 5'')$

36)



37) a) $Z = 2-3i$ b) $Z = 5-2i$ c) $Z=7+bi \quad \forall b$

38) sí, se verifica

40) 0^0