Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Movimiento Circular

Segunda Parte

3º Año

Cód- 7305-16

Prof. Liliana Grigioni
Prof. Marcela Palmegiani
Prof. María Eugenia Godino

Dpto. de Física

Física

fisica.ips.edu.ar
www.ips.edu.ar

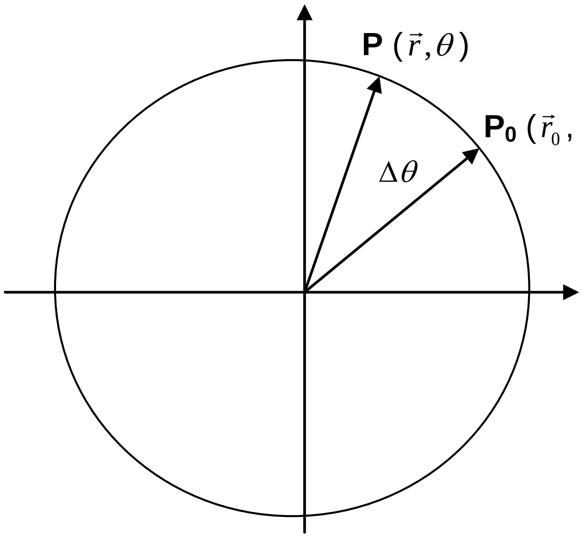
Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares

Cuando una partícula en movimiento sigue una trayectoria circular se puede dar su posición en cada instante indicando: el radio ***r*** y el ángulo barrido ***θ***

r es el radio de la trayectoria

θ es el ángulo que forma el vector posición con el semieje x positivo



Cuando un objeto gira desde una posición inicial θ_0 hasta una posición final θ, el desplazamiento angular es

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0$$

Podemos especificar la posición de la partícula dando sus coordenadas *x* e *y*, pero una descripción más simple y conveniente es el par ordenado ***(r, θ)*** que representa las coordenadas polares de la posición.
La simplificación proviene de que *θ* es la única coordenada que cambia con el tiempo, la otra coordenada, el radio, permanece constante, en cambio las coordenadas *x* e *y* varían ambas en cada instante y no permiten distinguir entre sí posiciones mayores a un giro completo.

Para expresar la medida del ángulo, se usan corrientemente dos unidades:

a) el grado sexagesimal (1º) definido como la amplitud angular de $\frac{1}{360}$ de un círculo completo

b) el radián (1rad) definido como la amplitud de un ángulo para el cuál el arco subtendido y el radio son iguales

La medida de un ángulo $\Delta\theta$ en radianes resulta del cociente entre la longitud del arco y el radio de la circunferencia correspondiente.

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}}$$

Un ángulo de 1 radián es aquel para el cual la medida del arco subtendido es igual al radio.

$$\Delta s = r$$

$$\Delta\theta = 1$$

Para convertir un ángulo en grados a un ángulo en radianes, o viceversa, usamos el hecho de que:

$$2\pi = 360\,^{o}$$

En el estudio del movimiento circular, todos los ángulos se indican en radianes. La posición θ queda así expresada por un número real, tal que a cada punto de la trayectoria se le asigna el par (*r*, θ) que caracteríza únivocamente a la trayectoria.

Velocidad Angular Media (ω_M): es el cociente entre el desplazamiento angular y el intervalo de tiempo en el cual se produce.

$$\boxed{\omega_M = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

La unidad de la velocidad angular se obtiene de la definición anterior:

$$[\omega_M] = \frac{[\Delta\theta]}{[\Delta t]} = \frac{rad}{s} = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

Velocidad Angular Instantánea (ω): es el valor al cual tiende la velocidad angular media cuando el intervalo de tiempo se hace infinitamente pequeño.

$$lím_{\Delta t \to 0} \ \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Esta velocidad angular puede ser constante o variable.

Aceleración Angular Media (α_m): en el caso de que la velocidad angular varíe en el tiempo, definimos la aceleración angular media como la relación entre la variación de velocidad angular y el intervalo de tiempo en el cual se produce.

$$\boxed{\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

La unidad de la aceleración angular se obtiene de la definición anterior:

$$[\alpha_M] = \frac{[\Delta\omega]}{[\Delta t]} = \frac{rad/s}{s} = \frac{rad}{s^2} = \frac{1}{s^2} = s^{-2}$$

Aceleración Angular Instantánea (α): es el valor al cual tiende la aceleración angular media cuando el intervalo de tiempo se hace infinitamente pequeño.

$$lím_{\Delta t \to 0} \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR CON ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE (MCUV)

En el estudio del movimiento rectilíneo encontramos que la forma más simple de movimiento acelerado que es posible analizar es el movimiento bajo aceleración lineal constante. De igual modo, para el movimiento circular, el movimiento acelerado más simple que es posible analizar es el que ocurre bajo aceleración angular constante.

Desarrollaremos a continuación, relaciones cinemáticas para el **movimiento circular bajo aceleración angular constante.**

Si α es constante y distinta de cero, se trata de un **Movimiento Circular Uniformemente Variado.**

$$\alpha = k \wedge \alpha \neq 0 \Leftrightarrow MCUV$$

Si la aceleración angular es constante, su valor coincide con el de la aceleración angular media; por lo tanto podemos escribir:

$$\alpha = \alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o}$$

Despejando ω; resulta:

$$\boxed{\omega = \omega_o + \alpha\,(t - t_o)}$$

esta fórmula permite calcular la velocidad angular en función del tiempo.

La velocidad angular media se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_0}$$

Trabajando algebraicamente en forma adecuada la expresión anterior se puede escribir:

$$\omega_m = \frac{\omega_o + \omega}{2}$$

Igualando las dos expresiones anteriores y sustituyendo ω por $\omega_0 + \alpha(t - t_0)$, obtenemos:

$$\boxed{\theta = \theta_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha\,(t - t_o)^2}$$

Si en la fórmula anterior reemplazamos (*t–t*$_o$) por $\dfrac{\omega - \omega_0}{a}$ y trabajamos algebraicamente, obtenemos:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\,(\theta - \theta_o)}$$

Esta expresión permite calcular la velocidad angular en función de la posición angular o del desplazamiento angular.

Si aceptamos como condición inicial del movimiento que $t_o = 0$, todas las ecuaciones recién vistas adoptan una forma más simplificada:

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \omega_o + \alpha\,t \\ &\Delta\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha\,t^2 \\ &\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\Delta\theta \end{aligned}}$$

Observe que estas expresiones para el movimiento circular con aceleración angular constante son de la misma forma que las correspondientes al movimiento lineal con aceleración constante con las siguientes sustituciones:

$$x \dashrightarrow \theta$$

$$v \dashrightarrow \omega$$

$$a \dashrightarrow \alpha$$

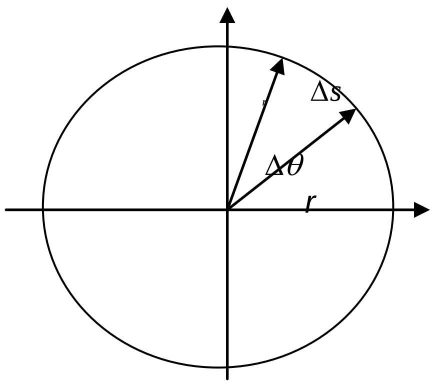
Si α **es constante e igual a cero** el movimiento recibe el nombre de **Movimiento Circular Uniforme**; las ecuaciones del movimiento circular uniformemente variado, con $\alpha = 0$, adoptan la forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = \omega_o = constante \\ \Delta\theta = \omega t \end{array}} \quad \Leftrightarrow \quad MCU$$

RELACIONES ENTRE MAGNITUDES ANGULARES Y LINEALES

En esta sección deduciremos algunas relaciones útiles entre las variables angulares y las variables lineales que describen el movimiento circular de una partícula.

Consideremos una partícula P que gira en una circunferencia de radio r



En un tiempo t recorre el arco Δs, el ángulo central correspondiente a dicho arco es el desplazamiento angular $\Delta\theta$ que expresado en radianes es

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

Esta expresión nos permite establecer relación entre la longitud del arco y el desplazamiento angular

$$\boxed{\Delta s = r\Delta\theta}$$

De las definiciones de v y de ω resulta:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$

Esta expresión nos permite establecer relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular

$$\boxed{v = r\omega}$$

Igualmente resulta:

$$\boxed{a_t = r\alpha}$$

Concluimos que $\Delta s, v, a_t$ (variables lineales) se vinculan con $\Delta\theta, \omega, \alpha$ (variables angulares) a través de las expresiones sencillas siguientes:

$$\Delta s = r\Delta\theta$$
$$v = r\omega$$
$$a_t = r\alpha$$

En todos los casos las variables angulares se expresan en radianes.

Considerando la relación $v = r\omega$, la expresión para la aceleración centrípeta adopta la forma:

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$

Recordando que $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$, resulta:

$$\boxed{a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \qquad ; \qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{\alpha}{\omega^2}}$$

Problemas

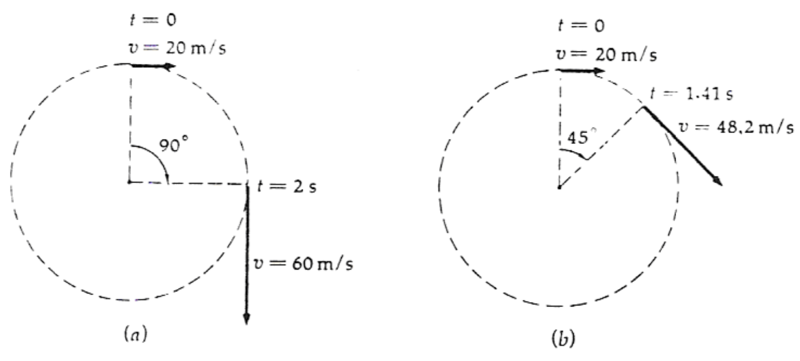
1) Una partícula recorre una trayectoria circular de radio 5 m con una velocidad cuyo módulo es constante e igual a 15 m/s. ¿Cuál es el módulo, dirección y sentido de su aceleración? R: dirección radial, sentido hacia el centro de la trayectoria, a_c = 45 m/s^2

2) Un satélite se mueve con rapidez constante en una órbita circular alrededor del centro de la Tierra y próxima a su superficie. La cantidad de aceleración es 9,8 m/s^2; ¿cuál es la rapidez y cuánto tiempo tarda en dar una revolución completa? (Radio de la Tierra: 6370 km). R: v = 7901 m/s; T = 5065 s

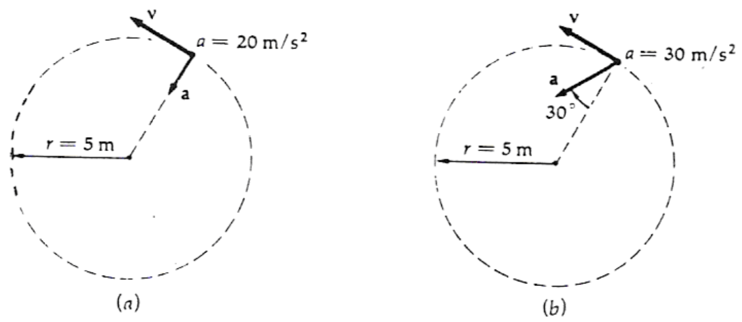
3) Un muchacho hace girar una pelota atada a una cuerda en una circunferencia horizontal de 1 m de radio. ¿A cuántas revoluciones por minuto deberá girar la pelota si su aceleración hacia el centro de la circunferencia ha de tener el mismo módulo que la aceleración de la gravedad? R: 30 rpm

4) Un piloto de avión se lanza hacia abajo para describir un rizo siguiendo un arco de circunferencia cuyo radio es 300 m. En la parte inferior de la trayectoria, donde el módulo de su velocidad es de 480 km/h, ¿cuáles son la dirección, el sentido y el módulo de su aceleración? R: radial, hacia el centro de la trayectoria, a_c = 59,26 m/s^2

5) En las partes (a) y (b) de la figura se están moviendo unas partículas en trayectorias circulares con velocidad de módulos variables, habiéndose indicado los vectores de velocidad. Halla el módulo del vector aceleración media entre las dos posiciones dadas en los dos casos.



6) En la figura unas partículas se están moviendo en sentido contrario a las agujas del reloj en una circunferencia de radio 5 m con velocidades cuyos módulos pueden ser variables. Los vectores aceleración se indican en ciertos instantes. Halla: a) Las componentes radiales y tangenciales de la aceleración en cada uno de esos instantes; b) El módulo de la velocidad en cada uno de esos instantes.



7) Una plataforma gira a 78 revoluciones por minuto y se encuentra que un pequeño objeto colocado a distancias radiales menores de 5 cm se mantiene sobre la plataforma, mienta que a valores mayores desliza respecto de la plataforma. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre la plataforma y el objeto? R: $\mu = 0{,}34$

8) Se utiliza una cuerda de 1 m de largo para colgar una esfera de 0,5 kg del punto más alto de un poste. La esfera se pone en movimiento circular alrededor del poste con una velocidad de 1,1 m/s formando la cuerda un ángulo de 20º con respecto al poste. Teniendo en cuenta que la esfera gira en un plano horizontal, calcula la tensión de la cuerda. Analiza el tipo de movimiento que describe la esfera.

9) Un automóvil describe una curva horizontal de 120 m de radio sobre una carretera sin peralte, con una velocidad de 40 km/h. ¿Cuál es el coeficiente mínimo de rozamiento entre los neumáticos y la carretera para que el automóvil no patine?; b) ¿Cuál debe ser el ángulo de peralte para esta velocidad? R: a) $\mu = 0{,}105$ b) 6º

10) Un péndulo simple se balancea en un plano vertical. Cuando la cuerda, de 0,75 m de longitud, forma un ángulo de 15º con la vertical, la esferita tiene una velocidad de 2,7 m/s. Encuentra la aceleración resultante.

11) Una rueda de 90 cm de diámetro parte del reposo y va aumentando uniformemente su velocidad angular hasta alcanzar un valor de 100 rad/s en 20 s. Calcule: a) La aceleración angular; b) El ángulo girado en ese tiempo. R: a) 5 rad/s^2 b) 10^3 rad

12) Una partícula describe una circunferencia de 5 m de radio con velocidad constante de 2 m/s. En un instante dado comienza a frenar con una aceleración constante de 0,5 m/s^2 hasta detenerse. Calcula:

a) la aceleración de la partícula antes de empezar a frenar
b) la aceleración resultante 2 s después de empezar a frenar
c) la aceleración angular mientras frena
d) el tiempo que tarda en detenerse.

13) La velocidad angular de un volante disminuye uniformemente desde 900 r.p.m. hasta 800 r.p.m. en 5 s. Calcule: a) La aceleración angular; b) El número de revoluciones efectuadas por el volante en el intervalo de 5 s; c) ¿Cuántos segundos más

serán necesarios para que el volante se detenga? R: a) -2,1 s^{-2} b) 70,83 vueltas c) 39,96 s

14) Una rueda que inicialmente se encuentra en reposo inicia un movimiento de rotación con aceleración constante igual a 1,5 rad/s^2 durante 8 s. A partir de este instante mantiene su velocidad angular constante durante 5 s más. A continuación desacelera a razón de 0,9 rad/s^2 hasta volver nuevamente al reposo. Calcule el número de revoluciones giradas por la rueda durante la totalidad del movimiento.-R: 29,92 vueltas

15) Un móvil recorre con velocidad de módulo constante una trayectoria circular de radio r. a) Si se duplica la velocidad, ¿cómo se ve afectada la aceleración?; b) Si se duplica el radio de la trayectoria, ¿cómo se ve afectada la aceleración?

16) Un objeto ejecuta un movimiento circular con una rapidez constante siempre que una fuerza neta de magnitud constante actúe perpendicular a la velocidad. ¿Qué pasa con la rapidez si la fuerza neta no es perpendicular a la velocidad?

17) Una masa *m* que está sobre una mesa horizontal lisa, está fija a una cuerda de longitud *l*, cuyo extremo a su vez está clavado sobre la mesa. La masa gira alrededor del clavo a una velocidad constante ω. Si la longitud de la cuerda se reduce a la mitad, la tensión de la cuerda no varía si la velocidad angular se cambia a:

a) $2\ \omega$ b) $\frac{\omega}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2}.\omega$ d) $\frac{\omega}{2}$

Selecciona y justifica.

18) Un chico da vueltas a una piedra de masa *m* sujeta a cuerda de longitud *l*. El plano de giro es vertical. La tensión de la cuerda cuando la piedra está en el punto más bajo de su trayectoria moviéndose con una velocidad angular ω es:
a) mg
b) $m(l\omega^2+g)$
c) $m(l\omega^2-g)$
d) ninguna de las anteriores.
Selecciona y justifica.

Bibliografía

Física, Wilson J, Buffa A, Lou B, Prentice Hall Inc., México, 2007

Física para la Ciencia y la Tecnología, Volumen 1, Tipler P, Editorial Reverté, España, 2001

Fundamentos de Física, Volumen 1, Sexta Edición, Serway R, Faughn J, International Thomson Editores, México, 2004

Física Conceptos y aplicaciones, Tippens P, Mc Graw Hill, México, 2001

Física, Blatt F, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1991

Física, Wilson J, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1996

Física, Tomo 1, Serway R, Mc Graw Hill, México, 1997

Física Principios y aplicaciones, Giancoli D, Editorial Reverté, España, 1985