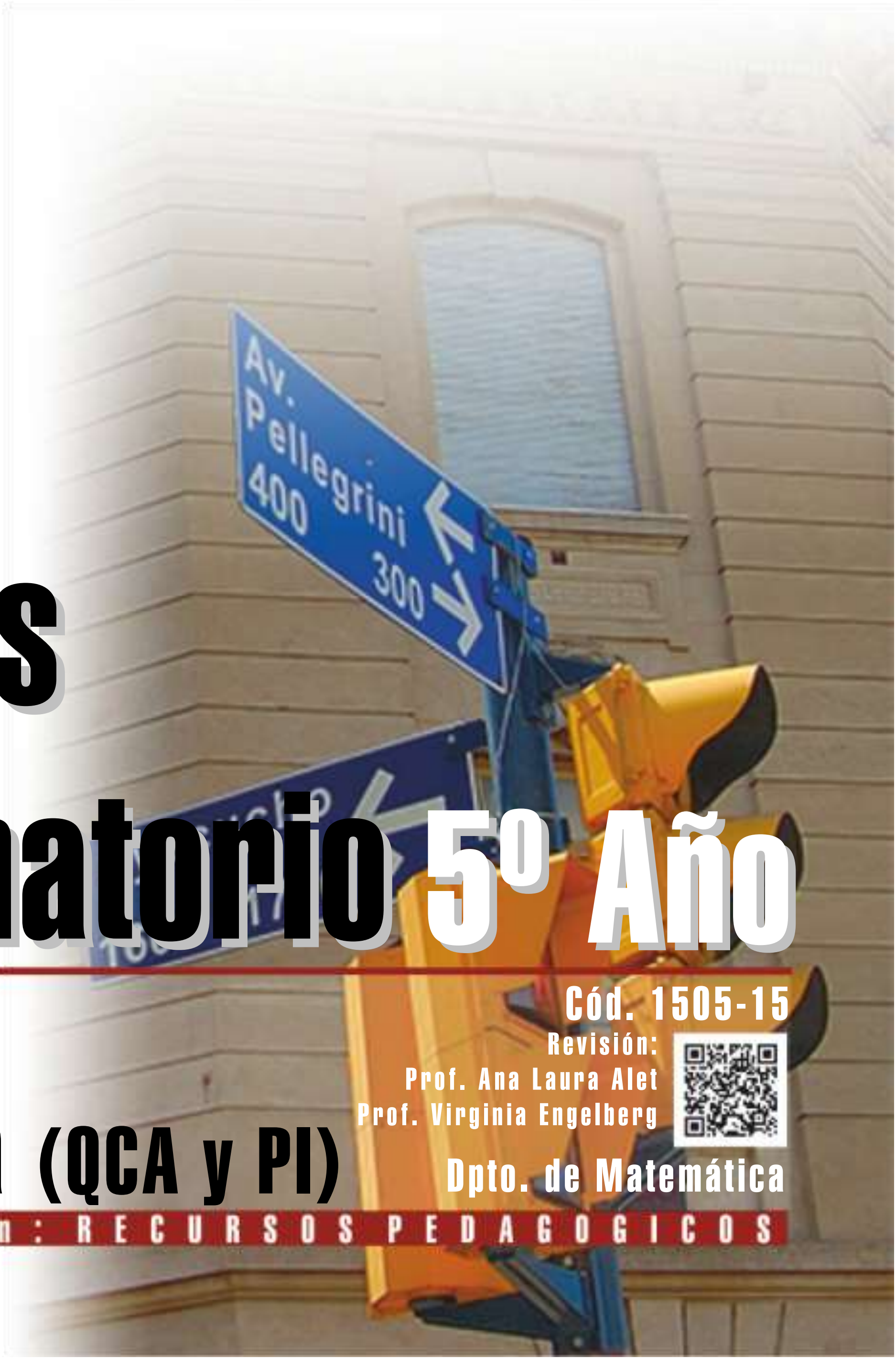
Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario

Universidad Nacional de



Análisis Combinatorio

5º Año

Cód. 1505-15

Revisión:
Prof. Ana Laura Alet
Prof. Virginia Engelberg

Matemática (QCA y PI)

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

ANÁLISIS COMBINATORIO

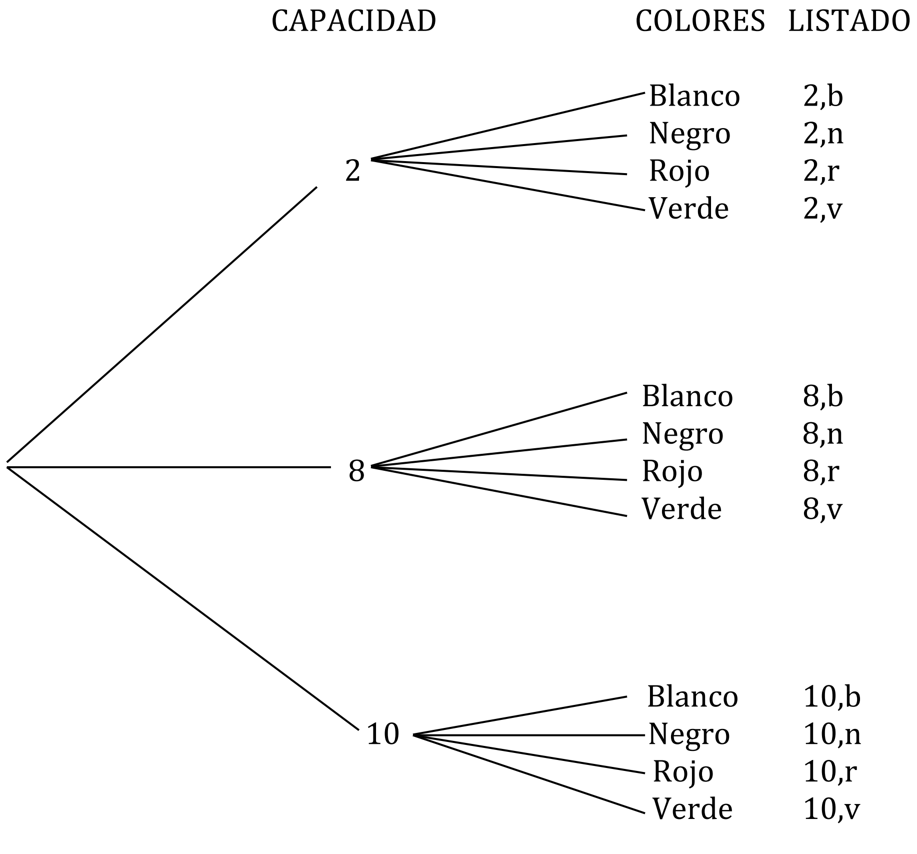
1. INTRODUCCIÓN

En ciertas situaciones interesa conocer de cuántas maneras puede realizarse una tarea o cuántos resultados diferentes hay en relación a una experiencia. La enumeración tiene aplicaciones en áreas como la probabilidad y estadística matemática y el análisis de algoritmos que se presentan en las Ciencias de la Computación.
En este material presentamos algunas estrategias habitualmente utilizadas para tal fin, que van desde diagramas, observación de patrones o simple sentido común (que a veces resulta la mejor estrategia de todas), hasta la aplicación de principios básicos, ecuaciones y fórmulas apropiadas.

2. ESTRATEGIAS BÁSICAS

Comencemos presentando las siguientes situaciones:

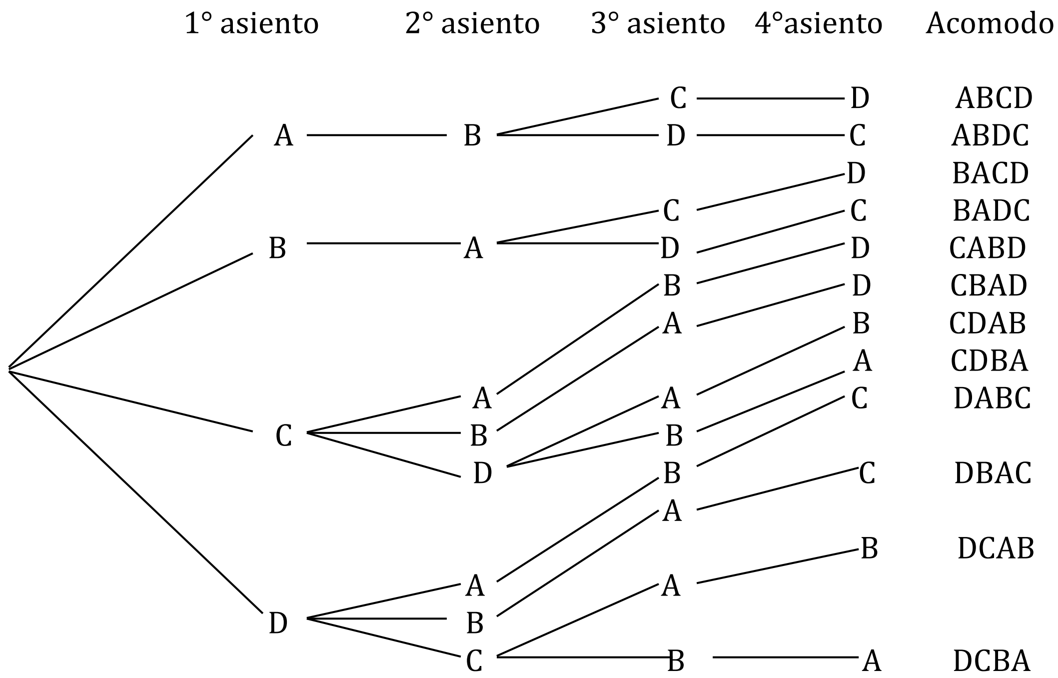
Ejemplo 1. Un fabricante produce cafeteras de 2, 8 y 10 tazas de capacidad, en los colores blanco (b), negro (n), rojo (r) y verde (v). ¿Cuántos tipos de cafeteras produce el fabricante?
Podemos de manera sistemática listar los diferentes tipos usando un diagrama de árbol:



Las ramas del árbol corresponden a las 3[capacidades].4[colores]=12 tipos de cafeteras que produce el fabricante.

Ejemplo 2. Un club de teatro realiza ensayos para una obra. Si seis hombres y ocho mujeres ensayan para los papeles principales (masculino y femenino), el director puede elegir a la pareja principal de 6.8=48 formas.

Ejemplo 3. Ana, Beto, Claudio y Dante tienen boletos para cuatro asientos reservados en determinada fila para un concierto de rock. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse, de modo que Ana y Beto estén juntos?
Podemos recurrir a un diagrama de árbol



Los chicos pueden acomodarse de 12 formas distintas de modo que Ana y Beto queden juntos.

Actividades

1. Elabora un diagrama de árbol que muestre todos los resultados posibles cuando se lanzan tres monedas. Luego lista las formas de obtener (a) al menos dos caras (b) más de dos caras (c) no más de dos caras.

2. Un automóvil Buick se fabrica en 12 colores, 3 potencias de motor, y dos tipos de transmisión. ¿Cuántos modelos distintos se pueden fabricar?

Ejemplo 4.
¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse utilizando solo los dígitos 0, 2, 5, 7 y 8?
La "tarea" es seleccionar, o formar, un número de dos cifras. Esta labor consta de dos pasos sucesivos: "elegir el primer dígito" y "elegir el segundo dígito".

1° dígito	2° dígito
	0
2	2
5	5
7	7
8	8

Hay cuatro formas de realizar el primer paso (cualquiera de los dígitos disponibles excepto por el 0), luego hay cinco opciones para el segundo paso, luego el número total de números que pueden formarse es 4.5 =20

Este procedimiento de multiplicación puede ser generalizado en el siguiente principio:

<u>Principio de Multiplicación</u>

Si una actividad puede realizarse en r pasos sucesivos y el paso 1 puede realizarse de n_1 formas, el paso dos de n_2 formas, y así sucesivamente hasta el paso r, que puede realizarse de n_r formas, entonces el número de diferentes actividades posibles es $n_1\ n_2 \ldots.. n_r$

n_1	n_2	….	n_r
1°	2°		r°

Ejemplo 5.
Juan decide obsequiar sus cinco vehículos de control remoto a sus tres hermanos menores. ¿De cuántas formas puede hacer la distribución?

Hay tres posibilidades para obsequiar el vehículo V1 y por cada una de ellas hay 3 posibilidades de obsequiar el vehículo V2.

_3_	_3_	_3_	_3_	_3_
V1	V2	V3	V4	V5

Luego hay 3.3=9 formas de obsequiar V1 y V2. Aplicando reiteradamente el principio de la multiplicación, obtenemos que son $3.3.3.3.3=3^5=243$ las formas de obsequiar V1, V2, V3, V4 y V5.

Actividades

3. Resolver los ejemplos 1 y 3 usando el principio de multiplicación.

4. ¿De cuántas maneras es posible responder un examen de 10 preguntas de tipo verdadero-falso?

5. Un gran salón tiene seis puertas, ¿de cuántas maneras es posible entrar por una puerta y salir por otra distinta? ¿Y si se puede entrar y salir por la misma puerta?

6. Algunos códigos postales están formados por seis símbolos, alternando letras y dígitos, empezando por una letra (por ejemplo N7V-9F3). Si las letras se eligen de un alfabeto de 26 letras (a) ¿cuántos códigos postales son posibles? (b) ¿cuántos códigos postales son posibles si no se permiten repetir letras? (c) ¿cuántos códigos postales son posibles si no se permiten repetir las letras ni los números?

7. Un n-bit es una cadena (¿Qué es una cadena?) con n ceros y unos. Por ejemplo 00101 es un 5-bit. A los 8 -bit se los llama byte. ¿Cuántos bytes diferentes hay? ¿Cuántos n-bits diferentes hay?

8. Una caja fuerte tiene una combinación de “tres números” y cada uno de sus tres discos tiene 40 números ¿Cuántas combinaciones distintas tiene la caja fuerte?

Ejemplo 6.
¿Cuántos grupos de tres o más personas pueden formarse con cuatro personas?

Analicemos lo que se pregunta: Si hay cuatro personas y quiero formar un grupo de cuatro personas, no habrá más alternativa que tener un grupo conformado por esas cuatro personas.
Si queremos formar un grupo de tres integrantes con cuatro personas, tendremos que excluir a una persona del grupo, como todas las personas son distintas, según quien no esté en el grupo, constituirá un grupo distinto, por lo que tenemos 4 grupos distintos.

Por lo que la cantidad de grupos de tres o cuatro personas que se pueden formar con cuatro personas son: 1 (si integran cuatro) + 4 (si integran tres) = 5 grupos distintos.

Principio de adición

Si una primera tarea puede realizarse de n_1 formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n_2 formas y con el mismo razonamiento una r-ésima tarea puede realizarse de n_r formas y además no es posible realizar las tareas en forma simultánea, entonces para llevar a cabo cualquiera de las tareas, pueden utilizarse cualquiera de las $n_1+n_2+.....+n_r$ formas.

Actividades

9. Dadas dos rectas paralelas a y b, se consideran 4 puntos sobre la recta a y 5 sobre la recta b, ¿cuántos triángulos hay con vértices en esos puntos?

10. ¿Cuántos grupos de dos o más personas pueden formarse con cuatro personas?

11. ¿Cuántos son los números enteros positivos de dos o tres dígitos?

Ejemplo 7.
¿Cuántos bytes comienzan con 1 o terminan con 1?

Contemos primero los bytes que comienzan con 1: "1 _ _ _ _ _ _ _"
Para cada uno de los siete lugares restantes, existen dos opciones: 0 ó 1. Hay por lo tanto $2.2.2.2.2.2.2=2^7 = 128$ bytes que comienzan con 1. Análogamente hay 128 bytes que terminan con 1.
¡Atención! La respuesta a nuestro problema no es 256, pues estaríamos contando dos veces los bytes que comienzan y terminan con 1. Como debemos restarlos, los vamos a contar.
Bytes de la forma "1_ _ _ _ _ _ 1" hay en total $2^6 =64$ de estas cadenas.
Por lo tanto hay 128+128-64=192 bytes que comienzan o terminan con 1.

Formalmente, por el ***principio de inclusión-exclusión***:
A = {cadenas de ocho bits que comienzan con 1}
B = {cadenas de ocho bits que terminan con 1}
$A \cap B$ = {cadenas de ocho bits que comienzan y terminan con 1}

Principio de Inclusión-Exclusión

Si A y B son dos conjuntos finitos cualesquiera entonces la cantidad de elementos de la unión es la suma de las cantidades de elementos de cada conjunto disminuido en la cantidad de elementos en común entre los conjuntos.

- ¿Cómo se aplicaría este principio con tres conjuntos? Realiza un diagrama de Venn (donde se dé cuenta de elementos en común) que esquematice la situación y explica este principio.

Nos interesa el cardinal de A U B

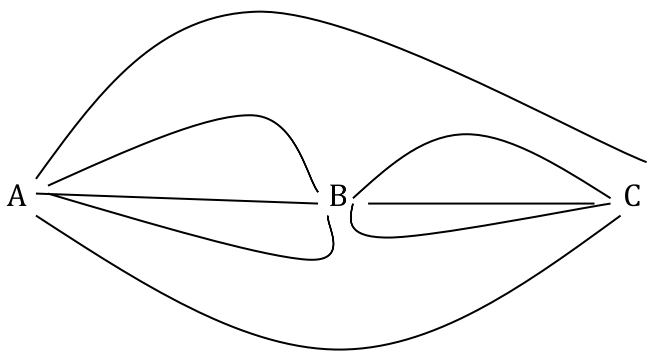
$\sharp$(A U B) =$\sharp$(A) + $\sharp$(B) - $\sharp$ (A$\cap$B) = 128+128-64 = 192

Actividades

12. Un instituto tiene 100 estudiantes, de los cuales 50 están inscriptos en los cursos de Francés, en Latín hay 40 inscriptos y 20 estudiantes están haciendo ambos cursos, ¿Cuántos estudiantes no están haciendo ninguno de estos cursos?

13. Una permutación de un conjunto de elementos es un cambio en el orden de aparición de dichos elementos cuando los disponemos linealmente.
¿Cuántas permutaciones de los dígitos hay que no terminan con 8 y no empiezan con 5? y ¿Cuántas no terminan con 8 o no empiezan con 5?

14. Tres localidades designadas en la figura con A, B y C están interconectadas por rutas como se muestra en la figura. (a)¿De cuantas formas se puede ir desde A hasta C? (b) ¿Cuántos trayectos diferentes pueden hacerse desde A hasta C y retornando hasta A si no se quiere repetir trayectos?



- Pensemos nuevamente en las permutaciones. Al respecto, si quisiéramos listar y luego contar todas las disposiciones de las letras a, b, c, tendríamos las siguientes

abc
acb
bac
bca
cab
cba

(Más adelante, en este cuadernillo veremos que se puede notar la cantidad de estas permutaciones de una manera determinada).
Ahora bien si SOLO ESTAMOS INTERESADOS EN COLOCAR DOS LETRAS A LA VEZ, habrá seis permutaciones de "tamaño dos", estas son: ab, ba, ac, ca, bc y cb.

Para resolver este ejercicio notemos que de un grupo de 3 elementos [las letras a, b, c], pensamos en un tamaño dos [dos lugares disponibles para ubicar cualquiera de las letras de nuestro grupo].

3. VARIACIONES

A continuación se presentan algunos ejemplos introductorios:

Ejemplo 8.

De un grupo de 5 estudiantes que se han presentado como candidatos se deben elegir a tres de ellos, para que se desempeñen como presidente, delegado y tesorero. ¿De cuántas formas es posible hacer la selección de los tres estudiantes?

Nuestro trabajo es contar todos los grupos de 3 estudiantes, que pueden elegirse con un orden de mérito establecido entre ellos (presidente, delegado, tesorero).

Esto equivale a elegir __}presidente __}delegado __}tesorero
(5 candidatos) (4 candidatos) (3 candidatos); es decir 5.4.3=60 formas de hacer la selección de 3 estudiantes para ocupar estos cargos.

Ejemplo 9.

Si A = {a; b; c; d} , los siguientes son ejemplos de variaciones de A:

de 3 elementos: abc; bca; dcb; adb
de 2 elementos: ab; ba; ad; cd
de 4 elementos: abcd; adcb; cadb

<u>Definición: Variación</u>

Dado un conjunto de n elementos $A = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, una variación de A con r elementos ($r \leq n$) son los elementos de un subconjunto de A de r elementos dispuestos en un cierto orden y se lo nota $V_{n,r}$.

Dado un conjunto de n elementos $A = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, todas las variaciones de A de orden r pueden hacerse eligiendo cualquiera de los n elementos para ubicarlos en la 1º posición, cualquiera de los (n-1) restantes para ubicarlos en la 2º posición y así sucesivamente hasta elegir el de la r-ésima posición que podrá ser cualquiera de los n-(r-1) elementos restantes no usados en las r-1 posiciones anteriores , resulta así: $n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \ldots n-(r-1) = V_{n,r}$;

$$\text{Luego } V_{n,r} = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \ldots n-r+1$$

<u>Observaciones:</u> De la definición podemos concluir

- dos variaciones son distintas si difieren en algún elemento
- dos variaciones son distintas si teniendo los mismos elementos, estos están dispuestos en distinto orden.

Ejemplo 10.

¿Cuántas palabras de 4 letras, con o sin sentido, pueden formarse con las letras de la palabra LENGUA?
Este problema se reduce a contar todas las posibilidades (p.) de disponer cuatro letras de las seis disponibles (L; E; N; G; U; A) :

—	—	—	—
6 p.	5 p.	4 p.	3p.

Por lo tanto la cantidad será 6.5.4.3 $=V_{6,4}$

Ejemplo 11.
De un grupo de 5 estudiantes que se han presentado como candidatos se deben elegir a tres de ellos, para que se desempeñen como, presidente, delegado y tesorero. ¿De cuantas formas es posible hacer la selección de los tres estudiantes?
Debemos contar todos los grupos de 3 estudiantes, que pueden elegirse con un orden de mérito establecido entre ellos (presidente, delegado, tesorero). Esto equivale a formar todas las variaciones de 3 elementos del conjunto de 5 estudiantes. Por lo que la elección puede realizarse de $V_{5,3}$=5.4.3 =60 maneras.

Actividades

15. Sea A = {a; b; c; d; e} (a) Escribe todas las variaciones de 4 elementos de A, que tengan las letras a, b y c consecutivas y en ese orden (b) ¿Cuántas son las variaciones de A de 4 elementos que tienen a las letras a y b? y las que tienen a y b consecutivas y en ese orden?

16. Usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 ¿Cuántos números con cuatro dígitos distintos pueden formarse?

17. ¿Cuántos enteros entre 100 y 999 inclusive están formados por dígitos impares distintos? ¿Y por dígitos distintos?

18. ¿Cuántos enteros mayores que 64000, tienen todos sus dígitos distintos y no aparecen los dígitos 0 y 9?

19. (a) ¿De cuántas formas pueden asignarse tres asientos entre 7 personas? (b) ¿De cuántas formas pueden sentarse 3 personas en una hilera de 7?

20. Para confeccionar los trajes de un ballet se dispone de gasa de 6 colores, al respecto:

(a) ¿Cuántos trajes distintos se pueden confeccionar con la blusa y la falda de distinto color?

(b)¿Cuántos se pueden confeccionar compuestos por blusa, falda y faja de 3 colores distintos?

4. FACTORIAL DE UN NÚMERO

En los ejercicios y ejemplos que hemos estudiado han aparecido el producto de números naturales consecutivos. Para trabajar de manera satisfactoria con estos productos, introducimos la siguiente definición:
Si k es un número natural mayor que 1, se define *factorial de k* y lo simbolizamos con *k!* al número que es el producto de los naturales entre 1 y k:

$$k! = k \,.\, (k-1) \,.\, (k-2) \dots 2.1 \,,\ k>1$$

$$1!=1$$

Por convención se define el factorial de 0 igual a 1: $0!=1$

Ejemplo 12. $6!= 6 .5.4.3.2.1=720$

Observemos que
$1!=1.0!$
$2!=2.1!$
$3!=3.2.1=3.2!$
$4!=4.3.2.1=4.3!$
$5!= 5.4.3.2.1= 5.4!$

En general vale que: $k!=k(k-1)! \ \ \forall k \geq 1$

Actividades

21. Escribe como producto de números naturales consecutivos:

(a) $\frac{10!}{6!}$ (b) $\frac{20!}{16!}$ (c) $\frac{121!}{115!}$ (d) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

22. Simplificar:

(a) $\frac{x!(x^2-1)}{(x+1)!}$ (b) $\frac{x!(y+1)!}{(x+1)!y!}$ (c) $\frac{(x-1)!\,(y-1)!}{(x^2-1)(y-1)^2}$ (d) $\frac{\left(\frac{n+1}{n!}\right)}{\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)}$

Ahora que conocemos el símbolo factorial, ¿podremos utilizarlo para escribir una fórmula para las variaciones?

- Observemos algunos casos particulares:

$V_{8,4} = 8.7.6.5 = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1} = \frac{8!}{4!} = \frac{8!}{(8-4)!}$

$V_{16,3} = 16.15.14 = \frac{16.15.14.13.12....2.1}{13.12.11...2.1} = \frac{16!}{13!} = \frac{16!}{(16-3)!}$

En general el número $V_{n,r}$ =n.(n-1)…(n-r+1)= ―――――――――― = ――――――

; es decir el número de n tomados de a (de tamaño) r puede escribirse como cociente de factoriales:

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Actividades

23. Escribe como cociente de factoriales

(a) $V_{20,15}$ (b) $V_{20,19}$ (c) $V_{13,6}$

24. Usando cualquiera de las 27 letras del alfabeto, (a) ¿cuántas cadenas de 7 letras distintas se pueden formar? (b) ¿cuántas cadenas de 7 letras distintas se pueden formar si se quiere que la cadena empiece con la subcadena AB? (c) si se quiere que la cadena no contenga la subcadena AB (d) si se quiere que en la cadena no aparezcan las letras A y B consecutivamente?

25. Los números de identificación de ciertos proyectos de investigación científica constan de tres letras seguidas de tres dígitos y luego tres letras más. Suponga que no se permite repetición dentro de cualquiera de los tres grupos, pero las tres letras en el primer grupo de tres pueden aparecer en el último grupo de tres; ¿Cuántos proyectos se pueden identificar?

5. PERMUTACIONES

El caso particular en el que una variación de un conjunto de n elementos sea de n elementos, recibe el nombre de *permutación.*

Ejemplo 13.
Si A = {a; b; c}, todas las permutaciones de los elementos de A son:

a b c; a c b; b a c; b c a; c a b; c b a

- Dado un conjunto de n elementos A = {x_1; x_2;…; x_n}, una permutación de A es una disposición de los n elementos de A en un determinado orden y se la nota P_n.

  ¿Cuándo se diferencian dos permutaciones distintas de un mismo conjunto?
  Rta :____

  Usando la fórmula que obtuviste para las variaciones, ¿cómo se puede notar a las permutaciones de n elementos? Rta: ____________________________

  Desafío: Escribe todas las permutaciones de los elementos de {a; b; c; d} que tengan las letras a y b consecutivas y cuya última letra sea c.

  Ejemplo 14. Determinemos la cantidad de cadenas diferentes que pueden formarse permutando las letras de la cadena AABBBC.
  Este problema tiene una característica que hasta ahora nunca se había presentado en los anteriores, algunas permutaciones que obtenemos trabajando como hasta ahora dan por resultado la misma cadena, ya que hay "elementos iguales".
  Utilicemos la siguiente estrategia: distinguir todas las letras. Para esto podemos utilizar subíndices A_1 A_2 B_1 B_2 B_3 C, de esta manera estamos en una situación conocida y la cantidad de cadenas diferentes en este caso es P_6.
  ¿Cuáles son las razones por las que repetimos cadenas?
  A_1A_2 es la mismo subcadena que A_2A_1, es decir hay un factor 2! que contribuye a repetir cadenas. Con el mismo razonamiento hay un factor 3! debido a la letra B, que contribuye a repetir cadenas y por ultimo un factor 1! debido la letra C. Si no consideramos estas permutaciones de elementos indistinguibles, entonces a la permutación 6!, le quitamos aquellos factores que devuelven cadenas iguales:

  $$\frac{6!}{2!\,3!\,1!}$$

  Por lo que hay 60 cadenas diferentes que pueden formarse con la cadena AABBBC.

  Un problema análogo es el de determinar la cantidad de números que pueden formarse intercambiando los dígitos del número 111223345.
  La cantidad buscada es $\frac{9!}{3!2!2!1!1!}$, lo que corresponde a 9 números entre los que tenemos distinguibles e indistinguibles, quitando las permutaciones de aquellos elementos indistinguibles, lo que nos asegura que los números son todos distintos.

  <u>En general:</u>

  Si tenemos n elementos que se componen de n_1 elementos indistinguibles entre sí, n_2 elementos indistinguibles entre sí, hasta n_k elementos indistinguibles entre sí donde 1+2+…+k=n, entonces para obtener todas las permutaciones distintas de esos n elementos hacemos:

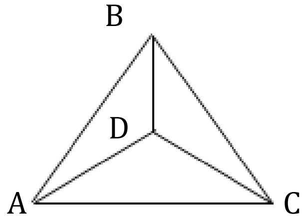
$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Actividades

26. ¿Cuántas permutaciones del conjunto S = {+; -; *; /; ^} encuentras?

27. Usando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 exactamente una vez, ¿Cuántos números se pueden formar?

28. La figura representa un tetraedro.
Se quiere recorrer todos los vértices exactamente una vez, caminando por las aristas.



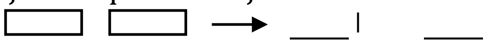
(a) Si se parte desde el vértice B, ¿De cuantas maneras puede hacerse?
(b) ¿De cuantas maneras si se puede partir de cualquiera de los vértices?

29. Cinco amigos tienen cinco entradas numeradas para ir a un concierto de rock.
(a) ¿De cuántas formas pueden distribuirse las entradas?
(b) ¿De cuántas formas pueden distribuirse las entradas si dos de ellos quieren sentarse juntos?
(c) ¿De cuántas formas pueden distribuirse las entradas si dos de ellos no quieren sentarse juntos?

30. Usando los dígitos 0; 1; 2; 3; 4 y 5 ¿Cuántos números naturales entre 99.999 y 999.999 con todos sus dígitos diferentes se pueden formar?

31. Se arroja un dado 10 veces y se anotan la secuencia de números que salen.
(a) ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse?
(b) ¿Cuántos resultados tienen tres “6”, dos “5”, un “4” y cuatro “3”?

32. (a) Cuatro varones y tres mujeres se sientan en un banco de 7 asientos alternando varones y mujeres. ¿De cuántas formas pueden hacerlo? (b) Cuatro varones y cuatro mujeres se sientan en un banco de 8 asientos alternando varones y mujeres. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

33. ¿De cuántas formas distintas puedo distribuir 8 bolitas iguales en 5 cajas diferentes?
Sugerencia: Esquematizar las cajas con las bolitas, dar algunas distribuciones. Y a partir de reconocer cuáles son las posibilidades, pensar en las cajas tal que dos cajas consecutivas formen una “barrita” de la siguiente manera  , así plantear el problema equivalente de distribuir barritas entre bolitas.

6. COMBINACIONES

En un ejemplo anterior determinamos de cuantas maneras pueden seleccionarse al presidente, delegado y tesorero de un grupo de cinco estudiantes y el resultado fue $V_{5,3}$. Si de ese grupo de estudiantes quisiéramos determinar de cuantas formas pueden seleccionarse a tres de ellos, para que en conjunto redacten un informe, no obtendríamos el mismo resultado ya que en cada grupo de tres no interesa un orden entre ellos, pues sólo es importante quienes integran el grupo.

A tu criterio, ¿para cuál de los dos requerimientos habría un mayor número de posibilidades?

Cuando en situaciones como esta nos interesa hacer una selección de elementos distintos de un conjunto sin tener en cuenta el orden, podemos valernos de la siguiente definición:

<u>Definición: Combinación</u>

Dado un conjunto de A de n elementos, llamamos *combinación de A de r elementos* a cualquier subconjunto de A con r elementos. La cantidad de combinaciones de r elementos que tiene A se llama *número combinatorio de n elementos tomados de a r* y lo notamos con el símbolo $C_{n,r.}$

Ejercicio. Establecer cuando dos combinaciones de r elementos de un conjunto A de n elementos, serán distintas.

Rta:____

Ejemplo15. Si A = {a; b; c; d; e} entonces todas las combinaciones de A de 2 elementos son:

{a; b} {a; c} {a; d} {a; e} {b; c} {b; d} {b; e} {c; d} {c; e} {d; e}

Y entonces $C_{5,\,2}=10$

Si queremos ahora todas las combinaciones de B = {a; b; c; d}, de tamaño 1, tendremos {c} {b} {a} {d} que son todos los subconjuntos de un elemento, luego $C_{4,1}=4$

- Como lo hicimos con las variaciones y las permutaciones, queremos lograr una fórmula para calcular el número combinatorio de n elementos tomados de a r: $C_{n.r}$

Consideremos el caso de $C_{5,3}$. Si A = $\{x_1; x_2; \ldots; x_5\}$, todos los subconjuntos de A de 3 elementos son :

$\{x_1; x_2; x_3\}$ $\{x_1; x_2; x_4\}$ $\{x_1; x_2; x_5\}$ $\{x_1; x_3; x_4\}$ $\{x_1; x_3; x_5\}$
$\{x_1; x_4; x_5\}$ $\{x_2; x_3; x_4\}$ $\{x_2; x_3; x_5\}$ $\{x_2; x_4; x_5\}$ $\{x_3; x_4; x_5\}$

Si realizamos todas las permutaciones del conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$, obtenemos las siguientes $P_3=3!=6$ permutaciones.

$x_1\ x_2\ x_3$
$x_1\ x_3\ x_2$
$x_1\ x_2\ x_3$ — $x_2\ x_1\ x_3$
$x_2\ x_3\ x_1$
$x_3\ x_1\ x_2$
$x_3\ x_2\ x_1$

De igual manera si realizáramos cada uno de los $C_{5,3}=10$ de 3 elementos, obtendríamos todas las variaciones de A de orden 3 , en consecuencia :

$$V_{5,3}=6.C_{5,3}=P_3 .C_{5,3}$$

No tiene nada de particular el haber considerado un grupo de 5 elementos, si tuviésemos n elementos y quisiéramos contar todas las disposiciones lineales de r elementos de esos n del conjunto (r≤n), podríamos pensar en todos los grupos de r elementos que consigo de ese conjunto de n elementos y luego por cada uno de ellos, permutar esos r elementos, por lo tanto:

$$V_{n,r} = P_r.C_{n,r} \Rightarrow C_{n,r} = V_{n,r} \;/\; P_r. \Leftrightarrow C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad r\leq n$$

También usaremos la siguiente notación $C_{n,r} = \binom{n}{r}$

Ejemplo 16. Una mano de truco consiste en 3 cartas elegidas de un mazo de 48 cartas españolas. ¿Cuántas manos de truco diferentes hay?
Se eligen 3 cartas de un conjunto de 48 cartas distintas entre sí (las cartas elegidas no tienen un orden). Hay entonces $C_{48,3}=\frac{48!}{3!45!}$ = 17296 manos de truco.

Ejemplo 17. Un examen tiene 15 preguntas y el alumno debe responder exactamente 10 de ellas. ¿De cuántas formas diferentes puede elegir el alumno las preguntas que responderá?. En términos combinatorios, ¿a qué equivale esta pregunta?: ____
Por lo que el alumno puede hacer la selección de C_,_=_______ formas distintas.

Elabora una estrategia para resolver, utilizando el número combinatorio el siguiente problema: Determinar la cantidad de cadenas diferentes que se pueden formar con la cadena EEEFFGYKK.

Actividades

34. Dado el conjunto A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}. (a) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto A? (b) ¿Cuántos subconjuntos de 3 o de 6 elementos tiene el conjunto A? (c) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto A que no contienen el elemento 9?

35. Consideremos 10 puntos sobre una circunferencia, (a) ¿cuántos triángulos con vértices en esos 10 puntos hay? (b) ¿cuántos segmentos determinan esos puntos? (c) ¿cuántos cuadriláteros convexos hay con vértices en esos puntos?

36. Si de un grupo de 8 ingenieros, quiere formarse una comisión de 4, ¿de cuántas formas pueden armarse?

37. ¿De cuántas formas pueden elegirse 8 cartas de un mazo de 48 cartas españolas, de forma tal que 5 cartas sean de basto y las otras 3 cartas sean de otro palo?

Ejemplo 18. De un grupo con 4 docentes y 7 estudiantes, quiere constituirse una comisión de 5 personas con al menos un docente y un estudiante, ¿cuántas comisiones diferentes pueden formarse?

Lo podemos resolver de dos formas:

Primera resolución: Las comisiones posibles las dividimos en comisiones con distintas características: las que tienen un docente y 4 estudiantes, las que tienen 2 docentes y 3 estudiantes, las de 3 docentes y 2 estudiantes y las de 4 docentes y un estudiante.

1 docente y 4 estudiantes: $C_{4,1} . C_{7,4} = 140$

2 docentes y 3 estudiantes: $C_{4,2} . C_{7,3} = 210$

3 docentes y 2 estudiantes: $C_{4,3} . C_{7,2} = 84$

4 docentes y 1 estudiante: $C_{4,4} . C_{7,1} = 7$

Total de comisiones: 140 + 210 + 84 + 7 =441

Segunda resolución: El total de comisiones de 5 personas que pueden armarse sin tener en cuenta la restricción de que debe haber docentes y alumnos es $C_{7+4,5} = 462$ comisiones no debemos tener en cuenta aquellas que están formadas solo por estudiantes $C_{7,5} = 21$. Entonces el número de comisiones formadas por estudiantes y docentes es 462-21=441. Notemos que no existe la posibilidad de que una comisión esté formada sólo por docentes, ya que hay sólo 4.
Esta segunda estrategia, que consiste en restarle a un total de posibilidades las no deseadas, suele ser útil en los problemas de conteo.

Actividades

38. De un grupo de 10 personas, se quiere formar una comisión de 5 personas de manera tal que dos de ellas (Carlos y María) no estén juntos en la comisión. ¿Cuántas comisiones diferentes pueden hacerse?

39. De un grupo de cinco ingenieros y seis arquitectos se quiere formar una comisión de 4 personas donde a lo sumo tres de ellos, sean ingenieros. ¿Cuántas comisiones diferentes pueden hacerse?

40. Se arroja una moneda ocho veces y se anota C cuando sale cara y X cuando sale cruz. Un resultado es una lista de 8 caras y cruces, cuyo orden de aparición es el de resultados sucesivos en los lanzamientos, por ejemplo: CCXCCCXC.
(a) ¿Cuántos resultados tienen exactamente tres caras? (b) ¿Cuántos resultados tienen a lo sumo seis caras? (c) ¿Cuántos resultados tienen cara en el segundo lanzamiento?

41. ¿Existe algún polígono regular convexo con 119 diagonales?

42. Pensemos las siguientes cuestiones:

- Si de un conjunto de n elementos quisiéramos contar todos los subconjuntos de n elementos que se pueden formar, cualquiera sea la cantidad n , tendríamos ___subconjuntos.

- Si de un conjunto de n elementos quisiéramos contar todos los subconjuntos que no contienen ningún elemento, tendríamos ___ subconjuntos.

- Todos los subconjuntos de un solo elemento de V={vocales del alfabeto español}, son {a}; {e}; {i}; {o}; {u} (♯(V)=5 y cantidad de subconjuntos de V con un solo elemento = 5); es decir $C_{5,1}=\frac{5!}{(5-1)!1!} = 5$.
  Generalizando, si de un conjunto de n elementos quisiéramos contar todos los subconjuntos que contienen un solo elemento, tendríamos $C_{n,1} = n$.

- Dado un conjunto A de n elementos, observemos que puede definirse una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos de A de r elementos y los de n-r elementos como sigue: a cada subconjunto Y contenido en A de r elementos le hacemos corresponder el subconjunto $C_A Y$ (complemento de Y con respecto a A, es decir conjunto de los elementos de A que no están en Y), entonces A tiene igual cantidad de subconjuntos con r elementos como con n-r elementos. Por lo tanto $C_{n,r} = C_{n,n-r}$. Estos números combinatorios $C_{n,r}$, $C_{n,n-r}$, se llaman complementarios.

- Consideremos los siguientes ejemplos :

$$C_{10,6} + C_{10,7} = 210 + 120 = 330 \text{ y } C_{11,7} = 330$$

$$C_{4,3} + C_{4,4} = 4 + 1 = 5 \text{ y } C_{5,4} = 5$$

$$C_{151,4} + C_{151,5} = \ldots\ldots \quad \text{y} \quad C_{152,5} = \ldots\ldots$$

¿ $C_{n,r-1} + C_{n,r} = C_{n+1,r}$?

$$C_{n,r-1} + C_{n,r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!r+n!(n-r+1)}{(n-r+1)!r!} =$$

$$= \frac{n!(r+n-r+1)}{(n-r+1)!r!} = \frac{n!(n+1)}{(n-r+1)!r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} = C_{n+1,r}$$

La identidad $C_{n,r-1} + C_{n,r} = C_{n+1,r}$ recibe el nombre de *"Teorema de Stieffel"*

Actividades

43. Proporciona una justificación combinatoria para el teorema de Stieffel.

Sugerencia: Considera un conjunto de n+1 elementos $x_1 \ldots x_{n+1}$, piensa cuántos subconjuntos del conjunto tienen r elementos.
Luego, piensa cuántos de esos subconjuntos tienen el elemento x_{n+1} y cuántos no lo tienen, luego por el principio de la suma queda probado el teorema.

44. Determina, si existen, soluciones para las siguientes ecuaciones:

(a) $C_{97,k} = 1$

(b) $C_{k,16} = C_{k,8}$

(c) $C_{k,3} + C_{k,2} = C_{8,m}$

(d) $C_{37,n+k} - C_{38,5} = - C_{37,n}$

45. Resuelve $C_{x,4} = 3\, C_{x-2,4}$

Teorema del Binomio

Desarrollemos el cuadrado del binomio, término por término resulta:
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)= aa+ab+ba+bb$
Haciendo lo mismo para el cubo de un binomio:
$(a+b)^3= (a+b)(a+b)^2= (a+b)(aa+ab+ba+bb)=aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb$

En el desarrollo del cuadrado del binomio obtenemos 4 sumandos que corresponden a la elección de a o b en el primer factor, a o b en el segundo factor 2^2.
En el desarrollo del cubo del binomio obtenemos 8 sumandos que corresponden a la elección de a o b en el primer factor, a o b en el segundo factor y a o b en el tercer factor, 2^3.
Análogamente si lo hacemos con $(a+b)^4$, obtenemos $2^4 = 16$ sumandos, se elige a o b en cada uno de los cuatro factores.
En $(a+b)^3$ nos podemos preguntar ¿cuántos sumandos hay en donde aparezcan x cantidad de "a" e y cantidad de "b"? Estamos seguros que $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$ (x, y son naturales).

Los sumandos son de la forma $a^{3-i}b^i$. Entonces hay un solo sumando con la expresión a^3 por que en la única forma que se obtiene es eligiendo "a" de los tres factores. Hay tres sumandos con la expresión a^2b esto surge de contar todos los sumandos en cuyos factores solo haya una "b", es decir $C_{3,1}=3$. Son tres los sumandos con la expresión ab^2 pues la cantidad de sumandos donde aparecen entre sus factores dos "b", es tres, $C_{3,2}=3$. Sólo un término tiene b^3 pues hay una sola forma ($1=C_{3,3}$) de elegir las tres "b".

$(a+b)^3= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = C_{3,0}\,a^3 + C_{3,1}\,a^2b + C_{3,2}\,ab^2 + C_{3,3}\,b^3$

Con el mismo razonamiento en el desarrollo del binomio a la cuatro resulta que el término $a^{4-i}b^i$ aparece $C_{4,i}$ veces, por lo que resulta:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= C_{4,0}\,a^4 + C_{4,1}\,a^3b + C_{4,2}\,a^2b^2 + C_{4,3}\,ab^3 + C_{4,4}\,b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

La fórmula general, la enunciamos en el siguiente teorema:

<u>Teorema</u>

Si *a* y *b* son números reales y *n* es un número natural, entonces

$$(a+b)^n = \sum_0^n C_{n,i}\,a^{n-i}b^i$$

De manera más explícita:

$$(a+b)^n = \sum_0^n C_{n,i}\,a^{n-i}b^i = C_{n,0}\,a^nb^0 + C_{n,1}\,a^{n-1}b^1 + C_{n,2}\,a^{n-2}b^2 + \ldots + C_{n,n-1}\,a^1b^{n-1} + C_{n,n}\,a^0b^n$$

Ejemplos.

$$(3+x)^5 = \sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}3^{5-i}x^i = C_{5,0}3^5x^0 + C_{5,1}3^4x^1 + C_{5,2}3^3x^2 + C_{5,3}3^2x^3 + C_{5,4}3^1x^4 + C_{5,5}3^0x^5$$

$$(x-2y)^4 = \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}x^{4-i}(-2y)^i = C_{4,0}x^4(-2y)^0 + C_{4,1}x^3(-2y)^1 + C_{4,2}x^2(-2y)^2 + C_{4,3}x^1(-2y)^3 +$$

$$+C_{4,4}x^0(-2y)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$

Actividades

46. Desarrollar mediante el teorema del binomio (a) $(2x-y)^7$ (b) $(-2x+z)^6$

47. En el desarrollo del polinomio $P(x)= (x-3)^{70}$, calcula el coeficiente que multiplica a x^{17}

48. ¿Aparece x^{55} en el desarrollo de $(x+\frac{1}{x^2})^{70}$? y, ¿ x^{50} ? Si la respuesta es afirmativa, calcula el coeficiente.

49. Usando el teorema del binomio, demuestra que

(a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ (b) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ (c) $\sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i} = 3^n$