Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario

Potenciación en R

Factoreo

2º Año

Cód. 1202-15

Prof. María del Luján Martínez
Prof. Verónica Filotti
Prof. Juan Carlos Bue

Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

CAPÍTULO 4: POTENCIACIÓN EN R

1. Potencia de exponente entero.

1-1. Potencia de exponente natural.

Definimos la potenciación de base real y exponente natural mayor que uno de la siguiente manera:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a..........a}_{n \ factores} \quad ; \quad a \in R \wedge n \in N \wedge n > 1$$

Expresión que leemos: "potencia de base a y exponente n"

Además se conviene que:

$$a^1 = a$$

Ejemplos:

Como multiplicación	Como potenciación	Leemos
$(-3).(-3)$	$(-3)^2$	Menos tres al cuadrado
$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^3$	Menos un medio al cubo
$(-1)(-1)(-1)(-1)$	$(-1)^4$	Menos uno a la cuarta
$\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}\right)^3$	Raíz cuadrada de dos al cubo

PROBLEMAS

1) Resuelve

a) $(-2)^5$ b) -2^5

c) $(-1)^4$ d) -1^4

e) $(-1)^6$ f) $(-1)^9$

g) $\left(-\frac{7}{5}\right)^2$ h) $-\left(\frac{7}{5}\right)^2$

2) Expresa como multiplicación cada una de las siguientes potencias:

a) $(-2)^3$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^5$

d) $(-6)^3$

e) $(-a)^3$

f) $-a^3$

g) $(-1)^5$

h) 0^4

i) $-a^4$

j) $(-a)^4$

k) $x^3.x^2$

l) $(4m)^3$

m) $(-y)^2(-y)^3$

n) $\left(-\frac{a}{b}\right)^4\left(-\frac{a}{b}\right)^3$

3) Completa cada enunciado

a) El resultado de toda potencia de base 1 y exponente natural es ....

b) El resultado de toda potencia de base (-1) y exponente natural par es ....

c) El resultado de toda potencia de base (-1) y exponente natural impar es………...............

Propiedades.

a)

La potenciación de base real y exponente natural es distributiva respecto de la multiplicación.

En símbolos: Si $a, b \in R$ y $n \in N$ se tiene que: $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Demostración:

Teniendo en cuenta la definición propuesta resulta:

- Si $n > 1$

$$(a \cdot b)^n \overset{(1)}{=} \overbrace{(a.b).(a.b)....(a.b)}^{n \ \ factores} \overset{(2)}{=} a.b.a.b....a.b \overset{(3)}{=} \overbrace{(aa......a)}^{n \ \ fact.}.\overbrace{(b.b......b)}^{n \ \ fact.} \overset{(1)}{=} a^n \cdot b^n$$

(1) Definición de potenciación.
(2) Propiedad asociativa de la multiplicación.
(3) Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación.

- Si $n = 1$

Resulta inmediato que: $(a.b)^1 = a.b = a^1.b^1$
Luego, concluimos que:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot \ b^n}$$

Ejemplos:

- $[(-5)\cdot(-2)]^5 = (-5)^5.(-2)^5$
- $[(-2).3]^2 = (-2)^2 3^2$
- $\left(-\frac{2}{5}\cdot 0,\widehat{1}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(0,\widehat{1}\right)^3$

b)

La potenciación de base real y exponente natural es distributiva respecto de la división, con el divisor distinto de cero.

En símbolos:

Si $a, b \in R,\ b \neq 0$ y $n \in N$ entonces se tiene que: $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Demostración

- Si $n > 1$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \overset{(1)}{=} \overbrace{\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{a}{b}\right)......\left(\frac{a}{b}\right)}^{\text{n factores}} \overset{(2)(3)}{=} \frac{\overbrace{a.a......a}^{\text{n factores}}}{\underbrace{b.b......b}_{\text{n factores}}} \overset{(1)}{=} \frac{a^n}{b^n}$$

(1) Definición de potenciación.
(2) Propiedad asociativa de la multiplicación.
(3) Producto de cocientes de números reales $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}; b \neq 0; d \neq 0$.

- Si $n = 1$

La demostración es inmediata, pues: $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$.

Hemos probado que: $\forall n \in N$ y $b \neq 0$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3}$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2}$

c)

La potencia, de exponente natural de otra potencia es la potencia de la misma base cuyo exponente es la multiplicación de los exponentes de las potencias dadas.

En símbolos: Si $a,b \in R$ y $n,m \in N$ entonces: $\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n.m}}$

Demostración:

- Si $n > 1$ y $m > 1$

$$\left[(a)^n\right]^m \overset{(1)}{=} \overbrace{(a)^n.(a)^n...(a)^n}^{\text{m factores}} \overset{(1)}{=} \overbrace{\underbrace{(a.a.....a)}_{}^{\text{n fact.}}\overbrace{(a.a.....a)}^{\text{n fact.}}.....\overbrace{(a.a......a)}^{\text{n fact.}}}^{\text{m factores}} \overset{(2)}{=}$$

$$= \overbrace{a.a...aa.a.....a.a.a.....a}^{\overbrace{n+n+n+......+n}^{\text{m sumandos}}} \overset{(3)}{=} \overbrace{a.a.........a}^{\text{n.m factores}} \overset{(1)}{=} a^{n.m}$$

(1) Definición de potenciación.
(2) Propiedad asociativa de la multiplicación.
(3) Definición de multiplicación de naturales.

- Si $n = 1$ o $m=1$

Se deben considerar tres opciones:

$n=1 \longrightarrow \left(a^1\right)^m = a^m = a^{1.m}$

$m=1 \longrightarrow \left(a^n\right)^1 = a^n = a^{n.1}$

$n = m = 1 \longrightarrow \left(a^1\right)^1 = a^1 = a^{1.1}$

Ejemplos:

a) $\left[5^3\right]^4 = 5^{3.4} = 5^{12}$

b) $\left[(-0,2)^2\right]^5 = (-0,2)^{2.5} = (-0,2)^{10}$

d)

La multiplicación de potencias de igual base, de exponente natural, es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes dados.

En símbolos: Si $a,b \in R \quad y \quad n,m \in N$ entonces: $\boxed{a^n \,.\, a^m = a^{n+m}}$

Demostración:

- Si $n > 1$ y $m > 1$

$$a^n.a^m \overset{(1)}{=} \underbrace{(a.a.........a)}_{\text{n factores}}.\underbrace{(a.a........a)}_{\text{m factores}} \overset{(2)}{=} \underbrace{a.a..........a}_{\text{n+m factores}} \overset{(1)}{=} a^{n+m}$$

(1) Definición de potenciación.
(2) Propiedad asociativa de la multiplicación.

- Si n o m son iguales a 1

Consideramos como ejemplo n=1.

$$a^1.a^m \overset{(1)}{=} a.\underbrace{(a.a.a.......a)}_{\text{m factores}} \overset{(2)}{=} \underbrace{a..a..a.a.......a}_{\text{(1+m) factores}} \overset{(1)}{=} a^{1+m}$$

Luego resulta que: $\boxed{a^n \,.\, a^m = a^{n+m}}$

Ejemplos:

a) $(-4)^3(-4)^6 = (-4)^{3+6} = (-4)^9$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{4+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^7$

Resumiendo las propiedades vistas resulta:

Si $a,b \in R \quad y \quad n \in N$ entonces:

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ,b \neq 0$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$
- $a^n.a^m = a^{n+m}$

PROBLEMAS

4) Relaciona cada expresión de la primera columna con la equivalente de la segunda columna.

$(4a)^3$	
$\left(\frac{1}{3}ab\right)^2$	$\frac{a^2b^2}{9}$
$\frac{5^2a^2}{b^2}$	$\left(\frac{2}{3}a\right)^3$
$(8a)^2$	$\frac{9}{25}\left(\frac{a}{b}\right)^2$
$\left(\frac{3a}{5b}\right)^2$	$64a^2$
$\left(-\frac{a}{5b}\right)^2$	$64a^3$
$(-8a)^2$	$\left(-5\frac{a}{b}\right)^2$
$\frac{2^3a^3}{3^3}$	$\frac{a^2}{9b^2}$

5) ¿Por qué si $a \neq 0$ y $n \in N$ $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$?

6) Sabiendo que: $a = 2x$, $b = \frac{1}{4}z$, $c = -z$, encuentra la expresión resultante en función de x y de z , utilizando las propiedades conocidas:

a) $a^4 . b^3$

c) $\left(\frac{ab}{c}\right)^3$

b) $\frac{b^4}{c^3}$

d) $-a^3 + x^3$

7) Resuelve las siguientes expresiones, indicando la o las propiedades de la potenciación que utilizas en cada caso.

a) $a^2 \cdot a^3 =$

b) $a^2 \cdot a^5 \cdot a =$

c) $\left(a^2\right)^3 =$

d) $\left(a^2\right)^2 \cdot a^3 =$

e) $\left(a^1\right)^4 \cdot a^5 =$

f) $\left[\left(a^2\right)^4 \cdot a^3\right]^2 =$

8) Descubre algunas regularidades que se dan en la potenciación.

- Calcula: $(-2)^4$; $(-3)^8$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$; $\left(\frac{1}{5}\right)^6$; $(-1)^{14}$

  ¿Cuál es el signo del número obtenido cuando el exponente de la potencia un número par?

- Calcula: $(-2)^5$; $(-3)^3$; $\left(-\frac{3}{2}\right)^5$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; $(-1)^{11}$

  ¿Cuál es el signo del número obtenido cuando el exponente de la potencia es un número impar?

- Elabora una conclusión respecto al signo de los resultados de una potencia de un número real según la paridad del exponente.

Por lo visto anteriormente, demuestra a continuación las siguientes propiedades de la potenciación:

> ➢ **Toda potencia de exponente natural par es no negativa**.

En símbolos:

Si $a \in R,\ n \in N\ y\ n\ es\ par,\ entonces\ a^n \geq 0$

> ➢ **Toda potencia de exponente natural impar es un número del mismo signo que el de la base**

En símbolos:

$Si\ \ a \in R \wedge a \neq 0,\ n \in N \wedge\ n\ es\ impar$

- $a > 0 \Rightarrow a^n > 0$
- $a < 0 \Rightarrow a^n < 0$

Nota:

$Si\ \ a = 0,\ n \in N \wedge\ n\ es\ impar\ \Rightarrow a^n = 0$

9) Resuelve aplicando propiedades

a) $(-3xy)\cdot\left(2x^3y^4\right)=$

b) $\left(2^3x^2y^4\right)^3=$

c) $\left(2x^3y\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}xy^3\right)=$

d) $\left[-\left(3x^4\right)\right]\cdot\left[-2y^4\right]=$

e) $\left[\left(x^2y^3\right)^2\right]^3=$

f) $\left(-2x^3y\right)\cdot\left(-2x^2y^3\right)=$

g) $\left(-72a^2\right)^4\cdot(-24a)^5=$

> ***Sugerencia***:
> Es conveniente expresar algunos números como producto de factores primos. Por ejemplo:
> $72 = 2^3 \ .3^2$

h) $\left(3^2ab\right)\cdot\left(3a^2b\right)=$

i) $\left[(-3)^2b^5c^2\right]^2\cdot\left[(-3)c^4\right]=$

j) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3g\right]^3\cdot\left[\left(-\frac{3}{2}\right)g^4\right]^2=$

k) $\left[(-x)^4\right]^3\cdot\left[(-x)^3\right]^4=$

l) $\left[(-0.\widehat{3})^2y^3\right]\cdot\left[(-3)y^4\right]^2=$

m) $\left(-15x^2\right)^3\cdot\left(-45x^2\right)^3=$

n) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3\cdot\left(-16a^3b\right)^2=$

10) Escribe P o N en cada cuadradito según el resultado sea positivo o negativo siendo m > 0.

	$(-m)^7$	$\square$	$(-m)^2\cdot(-m)$	$\square$
	$\left[(-m)^2\right]^3$	$\square$	$\left[(-m)^3\right]^2\cdot(-m)$	$\square$
$n\in N$;	$\left[(-m)^n\right]^2$	$\square$	$(-m)^{2n}\cdot(-m)$	$\square$

1-2 Potencia de exponente entero

Nos proponemos encontrar ahora una propiedad referente al cociente de potencias de igual base. Es decir :

$$\frac{a^m}{a^n} \text{ con } a \neq 0$$

Estudiaremos tal cociente atendiendo a las distintas posibilidades de *m* y *n* y suponiendo que *m* y *n* son naturales mayores que 1.

Así, planteando en forma literal, resulta:

- Si *m > n, es:*

$$\frac{a^m}{a^n} \overset{(1)}{=} \frac{\overbrace{a.a.........a}^{m\,\text{factores}}}{\underbrace{a.a.........a}_{n\ \text{factores}}} \overset{(2)}{=} \frac{\overbrace{a.a.............a}^{(m-n)\ \text{factores}}}{1} \overset{(1)}{=} a^{m-n}$$

Desafío:
De aquí en adelante, omitiremos la demostración para el caso en que los exponentes sean iguales a 1 por ser triviales.

- Si *m < n* es:

$$\frac{a^m}{a^n} \overset{(1)}{=} \frac{\overbrace{a.a..........a}^{m\ \text{factores}}}{\underbrace{a.a..........a}_{n\ \text{factores}}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\underbrace{a.a............a}_{(n-m)\ \text{factores}}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{a^{n-m}}$$

- Si *m = n,* es:

$$\frac{a^m}{a^n} \overset{(3)}{=} 1$$

(1) Definición de potencia de exponente natural.
(2) Simplificación.
(3) $\frac{x}{x} = 1 \ \forall x \neq 0$

Tener distintas expresiones para el *cociente de potencias de la misma base*, no nos resulta conveniente.
Nos proponemos unificar todos los casos. Entonces:

- Para el caso en el que ***m > n*** resulta que el cociente de las potencias de igual base es una potencia de la misma base cuyo exponente es la resta entre los exponentes del dividendo y el divisor.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- Para el caso en el que ***m < n***:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Si **definimos**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{con} \quad a \neq 0 \quad y \quad n \in N$$

Resulta

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$

- Para el caso en el que ***m = n***:

$$\frac{a^m}{a^n} = 1$$

Si **definimos**

$$a^0 = 1 \quad \text{con} \quad a \neq 0 \quad y \quad n \in N$$

Resulta

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 = a^0 = a^{m-n}$$

Observación:

0^0 no está definido

Hemos logrado **una sola expresión** para el cociente de potencias de igual base cualesquiera sean los exponentes naturales.

Esta es:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{donde} \quad m \wedge n \in N \text{ y } a \neq 0.$$

Coloquialmente expresamos:

El cociente de potencias de igual base, de exponente natural, es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes dados.

Como hemos visto, la definición de potencia se ha ido ampliando.

Definición de la potencia de base real y exponente entero :

$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a.a........a}^{\text{n factores}} & \forall a \;,\; n \in N \wedge n > 1 \\ a & \forall a \;,\; n = 1 \\ 1 & \forall a \neq 0 \;,\; n = 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \forall a \neq 0 \;;\; n \in Z \wedge n < 0 \end{cases}$$

Te contamos que, las propiedades que conocías para potencias de exponente natural también se verifican para potencias de exponente entero.

Es decir, si n y $m \in Z$ entonces:

- $(a.b)^n = a^n.b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$
- $a^n.a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ con $a \neq 0$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ con $a \neq 0$

PROBLEMAS

11) ¿Por qué $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ con $n \in N$ y $a \neq 0$? Ejemplifica.

12) Escribe como potencia de exponente positivo y resuelve:

a) 3^{-1}
b) $(-3)^{-1}$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$
d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$
e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$
f) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$
g) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$
h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$
i) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$
j) $(-1)^{-5}$
k) $(-3)^{-2}$
l) $(-1)^{-4}$
m) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$
n) $(-2)^{-5}$

13) Resuelve

a) $4^{-2} =$ $\quad - 4^{-2} =$ $\quad (-4)^{-2} =$

b) $\frac{1}{5^{-3}} =$ $\quad \frac{1}{-5^{-3}} =$ $\quad \frac{1}{(-5)^{-3}} =$

14) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^{-1} = \frac{2}{3}$
b) $x^{-3} = -27$
c) $x^{-5} = \frac{1}{32}$
d) $a \cdot a^3 \cdot a^x = a^{-2}$
e) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$

Nota:

En lo sucesivo supondremos que las variables asumen los valores que permiten que las diversas expresiones puedan estar definidas.

15) Expresa cada enunciado en lenguaje simbólico siendo *p* y *q* no nulos; luego halla su valor numérico para *p* = -1 y *q* = -2.

a) el triplo del cuadrado del número *p*.

b) el cubo de la diferencia entre el recíproco de p y el opuesto de *q*.

c) el opuesto de la suma de los cuadrados de *p* y *q*.

d) el cuadrado de la suma de *p* y el recíproco de *q*.

e) la diferencia entre los cubos del opuesto de *p* y el recíproco de *q*.

f) el cociente entre el cuadrado del consecutivo de p y la tercera parte de q.

g) el cubo de la diferencia entre *p* y *q*, en ese orden.

16) Resuelve, aplicando las propiedades de la potenciación, cuando sea posible expresando el resultado final con exponentes positivos:

a) $\left[2^{-3}\cdot 2+\left(3^{2}\right)^{-1}\right]^{-1}=$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\left(2^{-1}\right)^{2}+\frac{2^{-2}}{3^{-2}}=$

c) $\frac{3^{2}\cdot 3\cdot 3^{15}}{3^{3}\cdot 3^{16}\cdot 3^{-1}}=$

d) $\frac{(-2)^{2}\cdot\left[(-2)^{3}\right]^{-2}}{(-2)^{-5}}=$

17) Resuelve hasta llegar a la mínima expresión, indicando el resultado final con exponentes positivos.

a) $\left(2^{10}\cdot a^{-2}\right)\cdot\left(2\cdot a^{3}\right)=$

b) $\frac{2\cdot 3^{7}x^{2}}{3^{5}x^{4}}=$

c) $\left(\frac{1}{2}b^{2}\right)^{-1}=$

d) $\left(2c^{-1}d^{2}\right)^{-2}=$

e) $\frac{3\cdot a^{4}}{3^{-2}a^{2}}=$

f) $\left[\frac{2\cdot x^{-1}}{16\cdot x^{-3}}\right]^{3}=$

18) Resuelve y escribe el resultado sin utilizar exponentes negativos:

a) $\left(3^{-2}x\right).\left(2.3^{-1}x^{-2}\right)=$

b) $\left[(-2)^{2}a^{-1}\right]:\left[(-2)x\right]=$

c) $\frac{0,\overline{2}a^{-5}b}{\left(0,\overline{2}\right)^{-3}a^{3}b^{-3}}=$

d) $\left[(-5)a^{3}b^{-2}\right]^{2}=$

e) $\left[\left(-a^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}a^{-2}\right)\right]^2 =$

f) $\left(\dfrac{\pi^{-4}a^2}{\frac{1}{\pi}\cdot a}\right)^{-3} =$

g) $\left\{\left[(a^{-2}\cdot a^3)\cdot a^{-1}\right]^2\cdot a^{-1}\right\}^3 =$

h) $\left\{\left[(a^{-1}b^{-2})\cdot(a^{-1}n)\right]^2:(a^{-1}b^0)\right\}^{-2} =$

i) $\left[(a^{-2}b^{-3}):(abc)\right]^2:(a^{-1}b^{-2}c)^{-1} =$

19) Resuelve y simplifica las siguientes expresiones, de modo que el resultado se exprese con exponentes positivos:

a) $\frac{1}{3}x\left(x^2+a^{-2}\right)=$

b) $\left(\frac{1}{3}a^2-3a^{-1}+1\right):a=$

c) $\left[(-2)a+\frac{1}{2}a^{-1}\right]\cdot a^{-1} =$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\left(6+\frac{3}{x^{-1}}\right)=$

e) $x^{-1}\cdot\left(\frac{2}{x}+3x^2\right)=$

f) $\left(-2\,a^{-1}+a\right).\left(a^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{a}=$

g) $\frac{1}{a^{-2}b}+\frac{b^{-1}}{a^{-1}}=$

h) $\frac{3m^{-2}}{n^{-1}}+\frac{2\,m^{-2}\,n}{3^{-1}}=$

i) $\left(\frac{x^{-2}y}{3}+\frac{1}{x^2y^{-1}}\right).\left(x^{-2}y\right)^{-1} =$

j) $x^2(-x+\frac{1}{2}x^{-1})-(5-x^3)=$

k) $\left(p+\frac{1}{2}\right).(1-p)-\frac{1}{2}(-1-p)=$

l) $x^{-5}\left(x^3-x\right)+(-x^2)^{-2} =$

20) Factorea todo lo posible

a) $3x^2+\frac{3}{5}x^5-9x^8 =$

b) $-a^3b+2a^3\left(-b\right)=$

c) $\frac{4}{25}x^{-2}y^3-\frac{12}{50}x^{-4}y^5 =$

d) $(x+y)^2-2(x+y)$

e) $-2xy-4x^2y+6xy^2$

f) $(a-b)^2+a-b$

g) $-\frac{7}{3}a^2b+\frac{14}{9}a^3b-7ab=$

h) $(3-y)(x+1)-(3-y)+(3-y)^2$

i) $-\frac{5}{7}a+\frac{25}{49}a^2$

j) $(a-b).c-\frac{1}{2}(a-b)d$

21) Indica, en cada apartado, los valores que podrían asumir las variables para que estén definidas las siguientes expresiones en el conjunto de los números reales:

a) $\dfrac{1}{x^2 - x}$

b) $\dfrac{1}{3 + x^2}$

c) $\dfrac{-3}{x^3 - 1}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{x^2 y}$

e) $\dfrac{-6}{-x^2 + \dfrac{1}{4}}$

f) $\dfrac{x}{x^2 - 4}$

22) ¿Verdadero o Falso? Justifica tu respuesta.

a) $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$

b) $\dfrac{1}{x^3} < 0 \Rightarrow x < 0$

c) $(-x)^3 . |y| \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

23) Resuelve las siguientes operaciones aplicando las propiedades que correspondan:

a) $\left(-\dfrac{3}{2}a\right)^4 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}a\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}a\right) =$

b) $\left(\dfrac{1}{3}m\right)^2 : \left(\dfrac{1}{3}m\right)^{-1} =$

c) $\left(-\dfrac{1}{2}mp\right)^3 : \left(-\dfrac{1}{2}mp\right)^{-2} =$

d) $\dfrac{8^4 m^3 p^4 q^0}{8^2 m^{-2} p^4 q^3} =$

e) $\left\{\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right]^3\right\}^2 =$

f) $\left\{\left[\left(-\dfrac{3}{2}m\right)^4\right]^{-3}\right\}^{-1} =$

g) $\left|\left\{\left[\left(-\dfrac{5}{3}a\right)^2\right]^0\right\}^{-8}\right|^{15} =$

h) $\left(\dfrac{3}{4}a^5\right)^3 \cdot \left[\left(\dfrac{3}{4}a^5\right)^2\right]^{-4} \cdot \left(\dfrac{3}{4}a^5\right) =$

i) $\dfrac{5^4 a^{-5} b^8 c^0}{5^2 a b^{-2} c^5} =$

24) Determina el valor de x en cada enunciado:

a) $3^{-3} \cdot 3^{-3} = 3^{x}$

b) $3^{x} \cdot 3 = 1$

c) $3^{x} \cdot 3^{x} = 3^{-4}$

d) $\dfrac{3^{x}}{3} = 3^{-5}$

e) $\left(0,\widehat{5}\right)^{x+2} = \left(\dfrac{9}{5}\right)^{-3}$

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} = 16$

g) $\dfrac{x^{2}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-3}} = 4$

h) $\left(2^{x}\right)^{3} = 64$

i) $\dfrac{2^{x-y}.2^{3y}}{(2^{x+y})^{2}} = 0{,}25$

j) $\dfrac{x^{-6}.(x^{7})^{2} : x^{-10}}{x^{13} : x^{-2}} = \dfrac{125}{27}$

k) $10^{|\,2x-0{,}1|} = 1000$

l) $\dfrac{3^{x+1}}{9^{x}} = 81$

PRODUCTOS ESPECIALES

- ***El cuadrado de la suma***

En capítulos anteriores habíamos probado geométrica y analíticamente que:

$$\boxed{(x+y)^{2} = x^{2} + 2xy + y^{2}}$$

siendo $x \in Q_0^+ \quad e \quad y \in Q_0^+$.

Se puede probar que el cuadrado de la suma también es válido si $x \in R \quad e \quad y \in R$.

Es decir:

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término. A esta expresión se la denomina **Trinomio Cuadrado Perfecto**

PROBLEMAS

25) Transforma en suma:

a) $\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2 =$

b) $\left(-\frac{1}{3}+2x\right)^2 =$

c) $\left[-5x+(-2)\right]^2 =$

d) $\left[\frac{2}{7}x+\left(-\frac{3}{7}\right)\right]^2 =$

26) Demuestra los siguientes teoremas válidos para $x,\ y \in R$.

a) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

b) $(-x+y)^2 = x^2-2xy+y^2$

c) $(-x-y)^2 = x^2+2xy+y^2$

27) Resuelve :

a) $\left(-5x+\frac{1}{2}y\right)^2 =$

b) $\left(-6x^3+\frac{1}{2}y\right)^2 =$

c) $\left(-\frac{1}{4}x^2-y^4\right)^2 =$

d) $\left(-x^2y^5-4xy^3\right)^2 =$

28) Completa de modo que la expresión sea un trinomio cuadrado perfecto y luego factoréalo

a) $x^2-6x+\ldots\ldots.. = (\ldots\ldots..+\ldots\ldots..)^2$

b) $\frac{x^2}{25}+y^4+\ldots\ldots = (\ldots\ldots..+\ldots\ldots..)^2$

c) $\frac{1}{4}a^2+b^2+\ldots\ldots. = (\ldots\ldots..+\ldots\ldots..)^2$

d) $x^2+\ldots\ldots\ldots+2 = (\ldots\ldots..+\ldots\ldots..)^2$

29) Factorea los trinomios cuadrados perfectos

a) $a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}$

Respuesta:
Cuando se quiere analizar si la suma de tres términos es el cuadrado de la suma de otros dos, habrá que observar si existen en ella dos términos que sean cuadrados y un tercero, el doble producto de la base de esos cuadrados, siendo éste el único término que puede estar precedido por el signo menos.

$$a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} = a^2 + 2.\frac{1}{3}a + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{3}\right)^2$$

o también

$$a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} = (-a)^2 + 2.\left(-\frac{1}{3}\right)(-a) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-a - \frac{1}{3}\right)^2$$

El resultado no ha variado, pues los valores absolutos de la suma de los dos términos que son bases de los cuadrados son iguales.

b) $-4ab + 4b^2 + a^2$

Respuesta:

$$-4ab + 4b^2 + a^2 = 2(-2b)a + (-2b)^2 + a^2 = (-2b + a)^2$$

o también

$$-4ab + 4b^2 + a^2 = 2(2b)(-a) + (2b)^2 + (-a)^2 = (2b - a)^2$$

El resultado no ha variado pues $|-2b + a| = |2b - a|$

c) $9x^2 + \frac{1}{4} - 3x$

d) $a^4 + \frac{1}{4} + a^2$

e) $a + \frac{1}{4}a^2 + 1$

f) $-a + \frac{1}{4} + a^2$

g) $2x^2 + 4x + 2$

h) $0{,}09 + 0{,}04a^2 - 0{,}12a$

i) $a^6 - 8a^3 + 16$

➢ *CUBO DE UNA SUMA.*

$$(a+b)^3$$

Demostraremos que:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Entonces:

$$(a+b)^3 \overset{1}{=} [(a+b)(a+b)](a+b) \overset{2}{=} [(a+b)(a+b)](a+b) \overset{3}{=}$$

$$= [\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.](a+b) \overset{3}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \overset{4}{=}$$

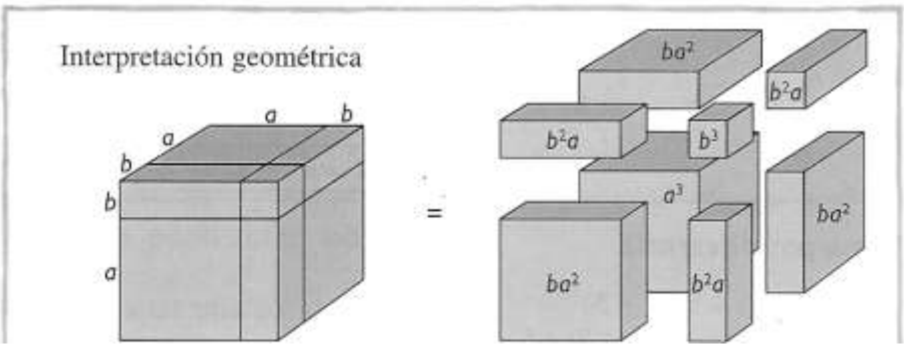
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(1) Definición de potencia
(2) Propiedad Asociativa de la multiplicación
(3) Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma
(4) Suma de términos semejantes

Coloquialmente resulta:

El cubo de una suma es igual al cubo del primer término, más el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.
A esta expresión se la denomina **Cuatrinomio Cubo Perfecto**

El cubo de binomio se puede interpretar geométricamente como el cálculo del volumen de un cubo de arista $(a+b)$.



PROBLEMAS

30) Aplica lo demostrado en los siguientes cubos de la suma:

a) $(x+5)^3 =$

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 =$

c) $\left[(-2)+y\right]^3 =$

d) $\left[\frac{1}{3}x+3\right]^3 =$

31) Demuestra los siguientes teoremas válidos para x , $y \in R$:

a) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

b) $(-x+y)^3 = -x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$

c) $(-x-y)^3 = -x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$

32) Resuelve :

a) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 =$

b) $\left(-2x+\frac{1}{3}\right)^3 =$

c) $\left(-xy^2-\frac{1}{2}x\right)^3 =$

d) $\left(-6x^3-xy^2\right)^3 =$

33) Escribe V (verdadero) o F (falso) según corresponda justificando sólo las falsas:

a) $x^2 - 2x + 1 = (x+1)^2$

b) $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$

c) $x^2 + 2x - 1 = (x-1)^2$

d) $1 + 3x^2 - 3x - x^3 = (1-x)^3$

e) $x^3 - 27x^2 + 9x - 27 = (x-3)^3$

34) Factorea cuando la expresión sea cuatrinomio cubo perfecto

a) $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$

Respuesta:

$$a^3 - 9a^2 + 27a - 27 = \underbrace{a^3}_{a^3} + \underbrace{\left(-9a^2\right)}_{3.(-3)a^2} + \underbrace{27a}_{3.(-3)^2 a} + \underbrace{(-27)}_{(-3)^3} = (a-3)^3$$

b) $8a^3 - \frac{b^3}{27} - 4a^2b + \frac{2}{3}ab^2$

c) $-6x^2 - 8x^3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

d) $a^3 - 3a^2 + 3a + 1$

e) $\frac{3}{2}a^4 + \frac{3}{4}a^2 + a^6 + \frac{1}{8}$

f) $-1 - 3x^2 - 3x - x^3$

g) $-\frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{6} - \frac{1}{8} - \frac{a}{4}$

➢ *EL PRODUCTO DE UNA SUMA POR SU DIFERENCIA.*

Trabajemos para encontrar una expresión que calcule fácilmente el producto de una suma por una diferencia de iguales términos, esto es en símbolos:

$$(a+b).(a-b)$$

Demostraremos que:

$$\boxed{(a+b).(a-b) = a^2 - b^2}$$

Resulta:

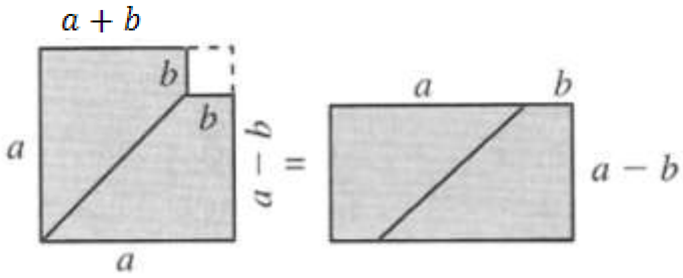
$$(a+b)\cdot(a-b) \underset{(1)}{=} a^2 - ab + ba - b^2 \underset{(2)}{=} a^2 - ab + ab - b^2 \underset{(3)}{=} a^2 + 0 - b^2 \underset{(4)}{=} a^2 - b^2$$

(1) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y de la resta.
(2) Propiedad conmutativa de la multiplicación.
(3) $(-c) + c = 0 \quad ; \ \forall c \in R$
(4) Por ser 0 el elemento neutro de la suma de reales.

Coloquialmente:

> El **producto de una suma por una diferencia de iguales términos** es igual a una **Diferencia de Cuadrado**

Interpretación geométrica:



PROBLEMAS

35) Resuelve las siguientes multiplicaciones de sumas por diferencias:

a) $(x+3)\cdot(x-3)=$

b) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{5}\right)=$

c) $\left(\frac{1}{3}a+3b\right)\cdot\left(\frac{1}{3}a-3b\right)=$

d) $(-x-y)\cdot(-x+y)=$

e) $\left(6x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(6x-\sqrt{2}\right)=$

36) Factorea las diferencias de cuadrados

a) $9-25b^2$

b) $\frac{1}{100}a^2-0{,}09$

c) $1-\frac{y^4}{16}$

d) $4(3+a)^2-25$

e) $-36x^2+\frac{25}{9}y^2$

37) Verifica las siguientes igualdades

a) $(a+b)^2-(a-2b)^2-3b(2a-b)=0$

b) $(x-1)\cdot(x-3)+1-(x-2)^2=0$

c) $\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2-\left[\frac{1}{2}(a-b)\right]^2=ab$

d) $(a+b)^3-(2a+b)^3=-a\cdot(7a^2+3b^2+9ab)$

e) $(x-y)^3-(x+y)^3=-2y\cdot(3x^2+y^2)$

f) $(x-a)\cdot(x+a)\cdot(x^2+a^2)=x^4-a^4$

g) $(x+y)^2+(x-y)\cdot(x+y)-2(x^2+y^2)=2y(x-y)$

38) Encontrar dos números tales que su suma sea 20 y la diferencia de sus cuadrados sea 40.

39) La suma de los cuadrados de dos números es 170 y la diferencia entre los cuadrados de esos mismos números es 72. Halla esos números.

40) Factorea las siguientes expresiones algebraicas: ***Factor Común por Grupos***

a) $x^2+2xy+x+2y$

En esta expresión, excepto sacando un factor común numérico, no se puede transformar en producto con la sola aplicación de la propiedad distributiva. Pero si se aplica la propiedad asociativa en la suma (si es necesario primeramente se aplica la propiedad conmutativa en la suma) ***agrupando los términos*** convenientemente se pueden extraer a veces, otros factores comunes como se indica a continuación

$$ac+bc+ad+bd \underset{\text{Propiedad asociativa}}{=} (ac+bc)+(ad+bd) \underset{\text{Propiedad Distributiva}}{=} c\,(a+b)+d\,(a+b) \underset{\text{Propiedad Distributiva}}{=} (a+b)\,.(c+d)$$

En la expresión propuesta resulta:

$$x^2+2xy+x+2y=\left(x^2+x\right)+\left(2xy+2y\right)=x(x+1)+2y(x+1)=(x+1)(x+2y)$$

Notemos que puede existir más de una forma para agrupar términos

b) $x^2+3xy+x+3y$

c) $ac+bc-ad-bd$

d) $ax-3a-x+3$

e) $-15a^2-\frac{5}{2}a-3ab-\frac{b}{2}$

f) $ax-ay-by+bx+2a+2b$

g) $x^2-3x+xy-ax+3a-ay$

h) $xy-5x-4y+20$

i) $4x-2xy+3y-6$

j) $-x^2+2x+xy-2y-2xz+4z$

k) $3x^2-6xb-4xy+8yb$

l) $3ax+3bx-a-b$

m) $\frac{1}{2}xy-\frac{7}{2}y-4x+28$

n) $-3ax+3ay-5bx+5by$

o) $2-p-4a+2ap-2b+bp$

41) Factorea todo lo posible (Factoreos combinados)

a) $-\frac{1}{16}-x^4+\frac{1}{2}x^2$

Respuesta

Debido a que este último polinomio sería un trinomio cuadrado perfecto si no fuese que dos de los tres términos están precedidos por el signo menos se puede lograr una transformación conveniente por aplicación combinada de propiedades vistas tal como se indica a continuación.

$$-\frac{1}{16}-x^4+\frac{1}{2}x^2=(-1)\left(\frac{1}{16}+x^4-\frac{1}{2}x^2\right)=(-1)\left(\frac{1}{4}-x^2\right)^2$$

pero $\frac{1}{4}-x^2$ es una diferencia de cuadrados, entonces:

$$-\frac{1}{16}-x^4+\frac{1}{2}x^2=(-1)\left(\frac{1}{4}-x^2\right)^2=(-1)\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$$

b) $ax^{10}+ay^{10}-2ax^5y^5$

c) a^3-4a

d) $\frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

e) ab^2-b^2+ab-b

f) $a^2+2a+1-b^2$

g) ax^2-a+x^2-1

h) $4a^4-8a^2+4$

i) $16x^3-24x^2y+12xy^2-2y^3$

j) $3x^2-12xy+12y^2$

k) x^4-81y^2

l) $6a^3b^3-24ab$

m) $9x^3-9x^2y-6x^2+6xy+x-y$

n) $x^6-10x^5+25x^4-x^2+10x-25$

o) $5x^2-10xy+5y^2$

p) $3x^9y^7 - 12x^7y^9$

q) $a^3 - a^2 - a + 1$

r) $\frac{20}{9}x^5b^3 - 5x^3b$

s) $x^3 - x^2y - 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 - y^5$

t) $-4x^3 - 2x^2 + 4x + 2$

u) $x^5 - x^3a^2 - a^3x^2 + a^5$

v) $\frac{1}{2}a^3x^2 - \frac{1}{8}a^3y^2 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{8}ay^2$

w) $\frac{1}{9}a^2x^4y^2 - \frac{2}{9}ax^3y^2 + \frac{1}{9}x^2y^2$

x) $4a - 8a^2 - 16a^3 + 32a^4$

42) Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta “la condición de anulación del producto”

a) $\left(x^2 - 2,\overset{\frown}{1}x\right).(1 - 6x + 9x^2) = 0$

b) $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{3} = 0$

c) $-2x^3 + 50x = 0$

d) $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

e) $(x^4 - 8x^2 + 16).(x - \sqrt{2}) = 0$

f) $(x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x).(2x + 0,\overset{\frown}{3}) = 0$

43) Simplifica si es posible (suponemos que los valores que pueden asumir las variables son tales que las expresiones queden siempre definidas)

a) $\dfrac{-a^2x + a^2y}{\frac{2}{7}a(x - y)}$

b) $\dfrac{a^2 - ab}{-a^2}$

c) $\dfrac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{x}{5}}{-3x^2 + 3x}$

d) $\dfrac{-a^2 + 2a - 1}{a - 1}$

e) $\dfrac{3x^3 + 9x^2 + 9x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

f) $\dfrac{-x^2 + xy - y^3 + xy^2}{xy^2 - x^3}$

g) $\dfrac{(x+2)^2 - 4(x+2)}{x^2 - 4}$

h) $\dfrac{\frac{a-b}{2}}{1 - \frac{b}{a}} : \dfrac{a}{2}$

i) $\dfrac{(y-x).(z-t)}{(z+t).(x-y)}$

j) $\dfrac{(-2x - 2y)(3x - 3y)}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y}$

k) $\dfrac{5x^3 + 15x^2b + 15xb^2 + 5b^3}{10x^2 + 20xb + 10b^2}$

Notación científica.

Para resolver problemas los científicos deben realizar, más de una vez, tediosos cálculos como el que te mostramos:

1234567 × 56789

Por supuesto, como estás pensando, se ayudan con calculadoras o computadoras.
Pero, veamos qué sucede si intentamos resolver nosotros este producto utilizando una calculadora científica.

Pulsa, para ello, las teclas que nos permiten obtener el producto planteado

¿Qué observas en el visor de tu calculadora? ………………………………..

La calculadora ha utilizado una forma de escritura llamada **notación científica.**

$$\underbrace{7{,}010982536}_{\text{número entre 1 y 10}}\times\underbrace{10^{10}}_{\text{potencia de 10}}$$

que consiste en escribir un número como el producto de un número entre 1 y 10 por una potencia entera de 10.

Así, son ejemplos del uso de este tipo de escritura las siguientes expresiones:

- 12 500 000 000 000 = $1{,}25.10^{13}$
- 2700 000 000 = $2{,}7.\ 10^{9}$

No sólo este tipo de escritura es útil para escribir **números grandes**. Los científicos también necesitan, a veces, trabajar con **números muy pequeños** como lo es, por ejemplo, el resultado de la operación.

0,23:1 000 200

¿Qué nos informa la calculadora en este caso al efectuar con ella este cálculo?

Pulsemos nuevamente las teclas que permiten obtener el cociente que buscamos.*¿Qué observas en el visor?...*

¿Qué indican, en este caso, estas expresiones?

Expresan que el número buscado es:

El -07 que aparece en el visor nos indica que debemos correr la coma 7 lugares a la izquierda

$2{,}200540092 \times 10^{-07} = 2{,}200540092 \times \frac{1}{10^7} =$

$= 0{,}0000002299540092$

La notación científica nos provee una forma de simplificar la escritura. Además no es sólo útil para expresar resultados de operaciones, es aún más útil cuando expresamos los números con los que operamos, ya sea en el cálculo manual, en el mental o en el cálculo mecanizado
En general concluimos:

Un número se expresa en notación científica cuando se lo escribe como el producto entre un número mayor que uno y menor que 10 y una potencia de base 10 con exponente entero.

PROBLEMAS.

44) Expresa cada número sin emplear potencias
   a) 2.5×10^{-3}
   b) 0.563×10^{-1}
   c) 0.0023×10^{5}
   d) 1.25×10^{4}

45) Expresa en notación científica
   a) 321 000 000 000
   b) 0,000 000 000 12
   c) 0,000 000 123 720
   d) 0,000 000 001 138
   e) 56 000 000 000 000
   f) $0{,}235 \times 10^{-2}$
   g) 2847×10^{2}

46) Expresa los siguientes números sin utilizar notación científica
   a) $-2{,}5.10^{4}$ b) $1{,}28.10^{6}$
   c) $-3{,}25.10^{-8}$ d) $4{,}835.10^{-5}$
   e) $4{,}8.10^{4}$ f) $1{,}65.10^{-6}$

47) Sabiendo que el micrómetro es la milésima parte del milímetro, escribe en notación científica 3,5 micrones expresados en metro

48) La estrella Alfa Centauro está a una distancia de la Tierra de aproximadamente 3,5 años luz. Expresa esa distancia sabiendo que la luz recorre 3.10^{5}km por segundo (un año 365,25 días aproximadamente)

Respuestas

1) a)-32 b) -32 c) 1 d) -1 e) 1 f) -1 g) $\frac{49}{25}$ h) $-\frac{49}{25}$

2)
a) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$
b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$
c) $(-\frac{2}{5})\cdot(-\frac{2}{5})\cdot(-\frac{2}{5})\cdot(-\frac{2}{5})\cdot(-\frac{2}{5})$
d) $(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)$
e) $(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)$
f) $(-1)\cdot a\cdot a\cdot a$
g) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$
h) $0\cdot 0\cdot 0\cdot 0$
i) $(-1)\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$
j) $(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)$
k) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$
l) $4m\cdot 4m\cdot 4m = 4\cdot 4\cdot 4\cdot m\cdot m\cdot m$
m) $(-y)\cdot(-y)\cdot(-y)\cdot(-y)\cdot(-y)$
n) $(-\frac{a}{b})\cdot(-\frac{a}{b})\cdot(-\frac{a}{b})\cdot(-\frac{a}{b})\cdot(-\frac{a}{b})\cdot(-\frac{a}{b})\cdot(-\frac{a}{b})$

3) a)1 b) 1 c) -1

4) A cargo del alumno

5) Demostración a cargo del alumno

6) a) $\frac{1}{4}x^4 z^3$ b) $-\frac{1}{64}z$ c) $-\frac{1}{8}x^3$ c) $-7x^3$

7) a) a^5 b) a^8 c) a^6 d) a^7 e) a^{13}

8) A cargo del alumno

9)

a) $-6x^4 y^5$	b) $512\ x^6 y^{12}$	c) $-x^4 y^4$	d) $6\ x^4 y^4$
e) $x^{12} y^{18}$	f) $4\ x^5 y^4$	g) $-2^{27}\ 3^{13}\ a^{13}$	h) $27\ a^3 b^2$
i) $-243\ b^{10} c^8$	j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{11}\cdot g^{11}$	k) x^{24}	l) y^{11}
m) $3^9\ 5^6\ x^{12}$	n) $-32a^{12} b^5$		

10)

N N
P N
P N

11) A cargo del alumno

12)

a) $\frac{1}{3}$ b)- $\frac{1}{3}$ c)3 d) -3 e) $\frac{125}{8}$ f)- $\frac{125}{8}$ g) $\frac{25}{4}$ h) $\frac{9}{4}$ i)16 j)-1 k) $\frac{1}{9}$ l)1 m) $\frac{125}{64}$ n) $-\frac{1}{32}$

13) a) $\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{16}$; $\frac{1}{16}$ b)125; -125; -125

14) a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c)2 d)-6 e)-4

15)

a) $3 \cdot p^2$ Sol: 3

b) $\left[\frac{1}{p} - (-q)\right]^3$ Sol: -27

c) $-(p^2 + q^2)$ Sol: -5

d) $\left(p + \frac{1}{q}\right)^2$ Sol: $\frac{9}{4}$

e) $(-p)^3 - \left(\frac{1}{q}\right)^3$ Sol: $\frac{9}{8}$

f) $\frac{(p+1)^2}{\frac{1}{3}q}$ Sol: 0

g) $(p-q)^3$ Sol: 1

16) a) $\frac{36}{13}$ b) $\frac{7}{2}$ c)1 d)-2

17) a) $2^{11}\ a$ b) $\frac{-18}{x^2}$ c) $\frac{2}{b^2}$ d) $\frac{c^2}{4\ d^4}$ e) $27\ a^2$ f) $\frac{x^6}{512}$

18)

a) $\frac{2}{27x}$ b) $\frac{-2}{ax}$ c) $\frac{16\ b^4}{6561\ a^8}$ d) $\frac{25\ a^6}{b^4}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{\pi^9}{a^3}$ g) $\frac{1}{a^3}$ h) $\frac{1}{a^7\ b^{10}\ c}$

19)

a) $\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3a^2}$

b) $\frac{a}{3} - \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a}$

c) $-2 + \frac{1}{2a^2}$

d) $4 + 2x$

e) $\frac{2}{x^2} + 3x$

f) $a^3 - \frac{3a}{2}$

g) $\frac{a^2+a}{b}$ h) $\frac{9n}{m^2}$ i) $\frac{4}{3}$

j) $\frac{x}{2}-5$ k) $-p^2+p+1$ l) $\frac{1}{x^2}$

20)

a) $\frac{3}{5}x^2\left(5+x^3-15x^6\right)$

b) $-3a^3b$

c) $\frac{2}{25}x^{-2}y^3\left(2-3x^{-2}y^2\right)$ o $\frac{2}{25}x^{-4}y^3\left(2x^2-3y^2\right)$

d) $(x+y).(x+y-2)$

e) $-2xy(1+2x-3y)$

f) $(a-b).(a-b+1)$

g) $-\frac{7}{9}ab\left(3a-2a^2+9\right)$

h) $(3-y).(x+3-y)$

i) $\frac{5}{7}a\left(-1+\frac{5}{7}a\right)$

j) $(a-b).\left(c-\frac{1}{2}d\right)$

21)

a) $\forall x \in R-\{0;1\}$ b) $\forall x \in R$ c) $\forall x \in R-\{1\}$

d) $\forall x,y \in R-\{0\}$ e) $\forall x \in R-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ f) $\forall x \in R-\{-2;2\}$

22) a)Falso b)Verdadero c)Falso

23)

a) $-\frac{2187a^7}{128}$ b) $\frac{m^3}{27}$ c) $-\frac{m^5p^5}{32}$

d) $\frac{64m^5}{q^3}$ e) 729 f) $\frac{531441\,m^{12}}{4096}$

g) 1 h) $\frac{256}{81a^{20}}$ i) $\frac{25\,b^{10}}{a^6\,c^5}$

24) a) -6 b) -1 c) -2 d) -4 e) 1 f) -7 g) $\frac{1}{4}$ h) 2 i) 2 j) $\frac{5}{3}$ k) 1,55 l) - 3

25)

a) $x^2 - x + \frac{1}{4}$ b) $4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$

c) $25x^2 + 20\,x + 4$ d) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{12}{49}x + \frac{9}{49}$

26) A cargo del alumno

27)

a) $25x^2 - 5\,x\,y + \frac{1}{4}y^2$ b) $36x^6 - 6\,x^3\,y + \frac{1}{4}y^2$

c) $\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2\;y^4 + y^8$ c) $x^4\,y^{10} + 8\,x^3\,y^8 + 16\,x^2\,y^6$

28)

a) $x^2 - 6\,x + 3^2 = (x-3)^2$ b) $\frac{1}{4}a^2 + b^2 + a\,b = \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2$

c) $\frac{x^2}{25} + y^4 + 2\frac{x}{5}y^2 = \left(\frac{x}{5} + y^2\right)^2$ d) $x^2 + 2\,x\sqrt{2} + 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)^2$

29)

a) resuelto

b)resuelto

c) $\left(3\,x - \frac{1}{2}\right)^2$ d) $\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2$ e) $\left(\frac{1}{2}a + 1\right)^2$

f) $\left(\frac{1}{2} - a\right)^2$ g) $(2\,x + 1)^2$ h) $(0.3 - 0.2\,a)^2$ i) $\left(a^3 - 4\right)^2$

30) a) $x^3 + 15\;x^2 + 75\;x + 125$ b) $x^3 + \frac{3}{2}\;x^2 + \frac{3}{4}\;x + \frac{1}{8}$ c) $-8 + 12\;y - 6\;y^2 + y^3$

d) $\frac{1}{27}x^3 + x^2 + 9\;x + 27$

31) A cargo del alumno

32) a) $x^3 - \frac{3}{2}\;x^2 + \frac{3}{4}\;x - \frac{1}{8}$ b) $-8\,x^3 + 4\;x^2 - \frac{2}{3}\;x + \frac{1}{27}$

c) $-x^3\,y^6 - \frac{3}{2}x^3\,y^4 - \frac{3}{4}x^3\,y^2 - \frac{1}{8}\;x^3$ d) $-216\;x^9 - 108\,x^7\,y^2 - 18\,x^5\,y^4 - x^3\,y^6$

33)

a) Falso, pues $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
b) Verdadero
c) Falso, pues $x^2 + 2x - 1$ no es el cuadrado de un binomio.

d) Verdadero

e) Falso, pues $(x-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

f) Verdadero

34)

a) $(a-3)^3$ b) $\left(2a-\frac{b}{3}\right)^3$ c) $\left(-2x-\frac{1}{2}\right)^3$ d) No es un cuatrinomio cubo perfecto.

e) $\left(a^2+\frac{1}{2}\right)^3$ f) $(-1-x)^3$ g) $\left(-\frac{a}{3}-\frac{1}{2}\right)^3$

35) a) x^2-9 b) $\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{25}$ c) $\frac{1}{9}a^2-9b^2$ d) x^2-y^2 e) $36x^2-2$

36)

a) $(3-5b).(3+5b)$ b) $\left(\frac{1}{10}a+0.3\right).\left(\frac{1}{10}a-0.3\right)$ c) $\left(1-\frac{y}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right).\left(1+\frac{y^2}{4}\right)$

d) $[2(3+a)-5].[2(3+a)+5]$ e) $\left(\frac{5}{3}y-6x\right).\left(\frac{5}{3}y+6x\right)$

37) A cargo del alumno

38) 11 y 9

39) 11 y 7; -11 y –7; 11 y –7; -11 y 7

40)

a) Resuelto b) $(x+3y).(x+1)$ c) $(a+b).(c-d)$ d) $(x-3).(a-1)$ e) $\left(-3a-\frac{1}{2}\right).(5a+b)$

f) $(x-y+2).(a+b)$ g) $(x-a).(x-3+y)$ h) $(y-5).(x-4)$ i) $(-2x+3).(y-2)$ j) $(-x+y-2z).(x-2)$

k) $(3x-4y).(x-2b)$ l) $(3x-1).(a+b)$ m) $\left(\frac{1}{2}y-4\right).(x-7)$ n) $(3a+5b).(y-x)$ o) $(2-p).(1-2a-b)$

41)

a) Resuelto b) $a\left(x^5-y^5\right)^2$ c) $a(a-2)(a+2)$ d) $\frac{1}{2}(a-1)^2$ e) $b(a-1)(b+1)$

f) $(a+1-b)(a+1+b)$ g) $(x+1)(x-1)(a+1)$ h) $4(a-1)^2(a+1)^2$ i) $2(2x-y)^3$ j) $3(x-2y)^2$

k) $\left(x^2-9y\right)\left(x^2+9y\right)$ l) $6ab(ab-2)(ab+2)$ m) $(x-y)(3x-1)^2$ n) $(x-5)^2(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

o) $5(x-y)^2$ p) $3x^7y^7(x-2y)(x+2y)$ q) $(a-1)^2(a+1)$ r) $5x^3b\left(\frac{2}{3}xb-1\right)\left(\frac{2}{3}xb+1\right)$

s) $\left(x-y^2\right)^2(x-y)$ t) $-2(x+1)(x-1)(2x+1)$ u) $\left(x^3-a^3\right)(x-a)(x+a)$ v) $\frac{1}{2}a\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{1}{2}y\right)(a+1)(a-1)$

w) $\frac{1}{9}x^2y^2(ax-1)^2$ x) $4a(1-2a)^2(1+2a)$

42)

a) $\left\{0;\frac{19}{9};\frac{1}{3}\right\}$ b) $\left\{1;-1;\frac{2}{3}\right\}$ c) $\{0;5;-5\}$ d) $\{1\}$ e) $\{2;-2;\sqrt{2}\}$ f) $\left\{0;\frac{1}{2};-\frac{1}{6}\right\}$

43)

a) $-\frac{7}{2}a$ b) $-\frac{a-b}{a}$ c) $-\frac{1}{15}$ d) $1-a$ e) $3(x+1)$ f) $\frac{x-y^2}{x(y+x)}$

g) 1 h) 1 i) $\frac{t-z}{z+t}$ j) $-12(x-y)$ k) $\frac{x+b}{2}$

44) a) 0.0025 b) 0.0563 c) 230 d) 12500

45)

a) $3{,}21\cdot 10^{11}$ b) $1{,}2\cdot 10^{-10}$ c) $1{,}23720\cdot 10^{-7}$ d) $1{,}138\cdot 10^{-9}$ e) $5{,}6\cdot 10^{13}$

f) $2{,}35\cdot 10^{-3}$ g) $2{,}847\cdot 10^{5}$

46)

a) -25.000 b) 1.280.000 c) -0,000 000 032 5 d) 0,000 048 35 e) 48.000 f) 0,000 001 65

47) 3,5 micrones = 3,5 10^{-3} mm = 3,5 10^{-3} 10^{-3} m = 3,5 10^{-6} m

48) 3 10^{5} Km x 60 x 60 x 24 x 365,25 x 3,5 = 3,31 10^{13} Km

BIBLIOGRAFÍA

***PREM 8   (Buschiazzo,Cattaneo,Gonzalez,Hinrischen,Filiputti,Lagreca)**

***Matemática Activa II(Masco,Cattaneo,Hinrischen)**

*** Matemática 8 de Julia Seveso y otros .Serie Vértice. Editorial Kapeluz**

*** Matemática 9 de Julia Seveso y otros . Serie Vértice. Editorial Kapeluz**

***Álgebra Intermedia de Allen R. Angel (Sexta Edición) . Editorial Pearson**

***Cuadernillo de factoreo . Cod 1206-12 . aDepartamento de Matemática del IPS. Recursos pedagógicos**