Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario

El Plano y la Recta en el Espacio

4º Año

Cód. 1405-15

Prof. María del Luján Martínez
Prof. Juan Carlos Bue
Prof. Mirta Rosito
Prof. Verónica Filotti
Dpto. de Matemática

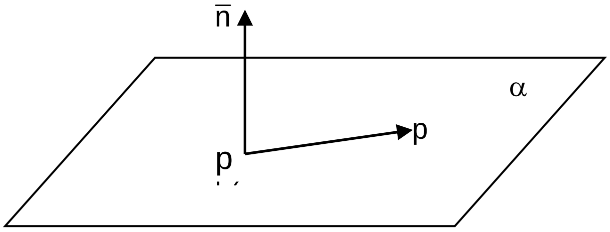
Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

EL PLANO

ECUACIÓN GENERAL

El plano como lugar geométrico
Dados un punto p_0 y un vector no nulo $\overline{n}$, el plano α perpendicular a $\overline{n}$ que contiene a p_0 es el lugar geométrico de los puntos p tales que $\overrightarrow{p_0p} \perp \overline{n}$ o $\overrightarrow{p_0p} = \overline{o}$.



De la definición anterior, podemos concluir:

$$p \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} \perp \overline{n} \text{ o } \overrightarrow{p_0p} = \overline{o} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{p_0p} \times \overline{n} = 0}_{(1)}$$

La expresión (1) es la ***ecuación vectorial del plano*** α perpendicular a $\overline{n}$ que contiene a p_0.

Fijado un sistema $\{o;\ \overline{i};\ \overline{j};\ \overline{k}\}$, y en él un punto $p_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ perteneciente a α y un vector no nulo $\overline{n} = (a;\ b;\ c)$ perpendicular a dicho plano, resulta que para todo punto $p(x;\ y;\ z)$ de α

$$\overrightarrow{p_0p} \times \overline{n} = 0 \Rightarrow (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0) \times (a;\ b;\ c) = 0$$

Resolviendo el producto escalar, obtenemos:

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_o - by_o - cz_o) = 0$$

Sustituyendo $-ax_o - by_o - cz_o$ por d, nos queda:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (2)$$

A la expresión (2) la llamamos ***ecuación general del plano*** α perpendicular a $\overline{n}$ que contiene a p_0.

Observación:

- Si el plano pasa por el origen de coordenadas, es decir por el punto $(0;\ 0;\ 0)$, su ecuación resulta $ax + by + cz = 0$, ya que $a0 + b0 + c0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$
- Si d = 0 la ecuación del plano resulta ax + by + cz =0 $\Rightarrow$ (0;0;0) verifica la ecuación al plano, entonces el plano pasa por el origen de coordenadas

<u>Definición:</u>

Dadas las constantes $a;\ b;\ c;\ d \in R$ con a; b y c no simultáneamente nulas, se llama ecuación lineal en tres variables x; y y z la expresión: $ax + by + cz + d = 0$ donde a; b y c son los coeficientes y d es el término independiente.

Teniendo en cuenta la definición anterior, resulta:

> La ecuación de un plano es una ecuación lineal en tres variables.

Ejemplo:

Determina la ecuación del plano perpendicular al vector $\bar{n} = (1;\ 2;\ -3)$ que pasa por el punto $p(-1;\ 0;\ 1)$.

Solución:

Los infinitos planos perpendiculares a $\bar{n}$ tienen por ecuación:

$$x + 2y - 3z + d = 0; \quad d \in R \qquad (*)$$

De todos ellos, el que pasa por el punto $p(-1;\ 0;\ 1)$ es el que con él se satisface la ecuación (*). De donde:

$$-1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 4$$

Entonces el plano buscado tiene por ecuación:

$$x + 2y - 3z + 4 = 0$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Dos planos en el espacio pueden ser paralelos o secantes.

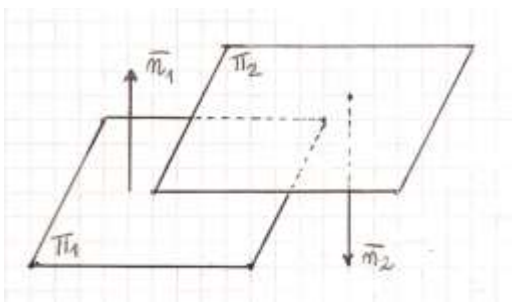
- **PLANOS PARALELOS**

Dos planos π_1 y π_2 son paralelos si y sólo si sus vectores normales son paralelos.

En símbolos:

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \text{ siendo } \vec{n}_1 \perp \pi_1 \text{ y } \vec{n}_2 \perp \pi_2$$

Gráficamente resulta:



Si $\pi_1)\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ y $\pi_2)\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ entonces:

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \text{ siendo } \vec{n}_1 \perp \pi_1 \text{ y } \vec{n}_2 \perp \pi_2 \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in R-\{0\} \text{ tal que } \vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

de donde:

$$(a_2;\ b_2;\ c_2) = \lambda (a_1;\ b_1;\ c_1) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_2 = \lambda a_1 \\ b_2 = \lambda b_1 \\ c_2 = \lambda c_1 \end{cases}$$

Si $a_1 \neq 0$; $b_1 \neq 0$ y $c_1 \neq 0$, la expresión anterior resulta equivalente a:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \lambda$$

Observación:

En particular, cuando dos planos paralelos tienen algún punto en común, son coincidentes y resulta $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}$

- **PLANOS SECANTES**

Dos planos no paralelos se llaman secantes.

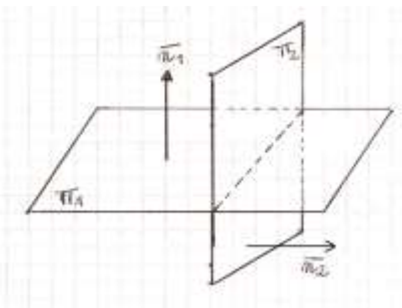
<u>Caso particular de planos secantes:</u> Planos perpendiculares

Dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares sí y sólo si son perpendiculares sus vectores normales.

En símbolos:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \text{ siendo } \vec{n}_1 \perp \pi_1 \text{ y } \vec{n}_2 \perp \pi_2$$

Gráficamente resulta:



Si $\pi_1)\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ y $\pi_2)\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ entonces:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \text{ siendo } \vec{n}_1 \perp \pi_1 \text{ y } \vec{n}_2 \perp \pi_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (a_2;\ b_2;\ c_2) \times (a_1;\ b_1;\ c_1) = 0$$

de donde:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Ejemplos:

a) Determina la ecuación de un plano paralelo no coincidente a 2 x - y + 3 z = 3.

Solución:

Basta multiplicar por un mismo número a las componentes del vector normal. Uno de los infinitos planos podría ser: 8 x - 4 y + 12 z = 3

b) Determina si los planos $x+y+z-5=0$ y $-x-y+z-3=0$ son perpendiculares.

Solución:

Debemos calcular el producto escalar entre los vectores normales a los planos dados, esto es:
1 . (-1) + 1 . (-1) + 1 . 1 = - 1 - 1 + 1 = -1 $\neq 0 \Rightarrow$ los planos no son perpendiculares.

PROBLEMAS

1) Determina la ecuación del plano α sabiendo que $p(-1;\ 2;\ -2) \in \alpha$ y $\bar{a}=(2;\ 0;\ -1) \perp \alpha$.

2) a) Determina, que un plano no paralelo a los ejes coordenados y que no contiene al origen, admite por ecuación una expresión de la forma: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1;\ p,\ q,\ r \in R-\{0\}$, que se conoce con el nombre de ***ecuación segmentaria del plano***.

b) A partir de la ecuación segmentaria del plano, analiza las intersecciones del mismo con los ejes coordenados.

3) Dada la ecuación del plano $3x+2y-6z+12=0$, determina:
   a) su ecuación segmentaria
   b) sus intersecciones con los ejes coordenados
   c) su representación gráfica

4) ***Tres puntos no alineados determinan un único plano***. Determina la ecuación del plano que contiene a los puntos $p(-1;-1;2)$; $t(0;3;3)$ y $v(1;3;4)$.

5) Representa los siguiente conjuntos de puntos y define el lugar geométrico que determina cada uno:

   a) $A=\left\{(x;\ y;\ z)/\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1\right\}$
   b) $B=\left\{(x;\ y;\ z)/\ \frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1\right\}$
   c) $C=\{x/\ x=1\}$
   d) $D=\{(x;\ y)/\ x=1\}$
   e) $E=\{(x;\ y;\ z)/\ x=1\}$

6) Sea la ecuación del plano $\beta)\ ax+by+cz+d=0$. Determina las características geométricas del mismo si:
   a) $a=0$
   b) $b=0$
   c) $c=0$
   d) $a=b=0$
   e) $b=c=0$
   f) $a=c=0$

7) El plano δ es perpendicular a los planos $2x-3y+z+1=0$ y $x-y-z-3=0$. Determina la ecuación de δ si el punto $(-1;2;4)$ pertenece al mismo.

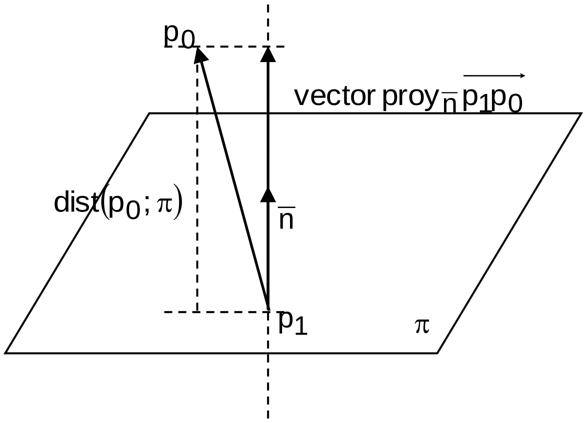
8) Los vectores $\overline{a}=(1;1;-4)$ y $\overline{b}=(0;3;1)$ son paralelos al plano φ y además el punto $(1;2;2)$ pertenece al mismo. Determina la ecuación de φ.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Analizaremos a continuación el problema de cómo calcular la distancia desde un punto p_0 cualquiera a un plano π (p_0 no perteneciente a π). Para ello te proponemos que realices los siguientes pasos.

i. Ubica π y p_0 en un gráfico
ii. ubica un punto p_1 cualquiera de π
iii. determina $\overrightarrow{p_1p_0}$
iv. considera un vector $\overline{n}$ normal (perpendicular) a π
v. la distancia de p_0 a π esta dada por

$$\text{dist}(p_0;\pi)=\left|\text{proy}_{\overline{n}}\overrightarrow{p_1p_0}\right|$$



PROBLEMAS

9) Demuestra que dado el plano $\pi)\ ax+by+cz+d=0$, el punto $p_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ no perteneciente π y el punto $p_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ perteneciente a π, entonces

$$\text{dist}(p_0;\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

10) Halla la distancia del punto $r(-1;2;4)$ al plano $\pi)\ 2x-3y+z+1=0$.

11) Determina la ecuación de el o los planos paralelos a $3x+y-5z+2=0$, cuya distancia al punto $s(0;\ -2;\ 3)$ es $\sqrt{140}$.

PROBLEMAS ADICIONALES

12) Determina el plano perpendicular al plano $\rho)\ x+y+z-1=0$, paralelo al vector $\overline{u}=(-1;\ 0;\ 2)$ y que pase por el punto p(0; -1; 2).

13) Determina justificando la respuesta si son V(verdaderas) o F(falsas) cada una de las siguientes proposiciones:

a) Si $\pi_1)\ x-y+2z+1=0$ y $\pi_2)\ -2x+2y+1=0$ entonces $\pi_1 // \pi_2$
b) el plano z = 3 es paralelo al eje z.
c) Dos planos perpendiculares a un tercero son paralelos entre si.
d) El plano x + 2y – 4 = 0 es paralelo al plano xy.
e) Los planos $\pi_1)\ x-2y+z-2=0$ y $\pi_2)\ 2x+y+3=0$ son perpendiculares.

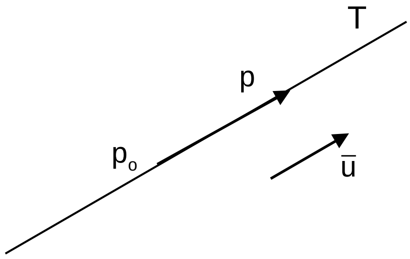
14) Dados los plano $\alpha)\ x+2y-z+3=0$ y $\beta)\ x+2y-z+5=0$,

a) Justifica que son paralelos
b) Calcula la distancia entre ambos, es decir, $\text{dist}(\alpha;\ \beta)$.

RECTA EN EL ESPACIO

ECUACIÓN VECTORIAL Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

La recta en el espacio como lugar geométrico
Dados un punto p_0 y un vector no nulo $\bar{u}$, la recta T paralela a $\bar{u}$ que pasa por p_0, es el lugar geométrico de los puntos p tales que $\overrightarrow{p_0p} // \bar{u}$ o $\overrightarrow{p_0p} = \bar{o}$.

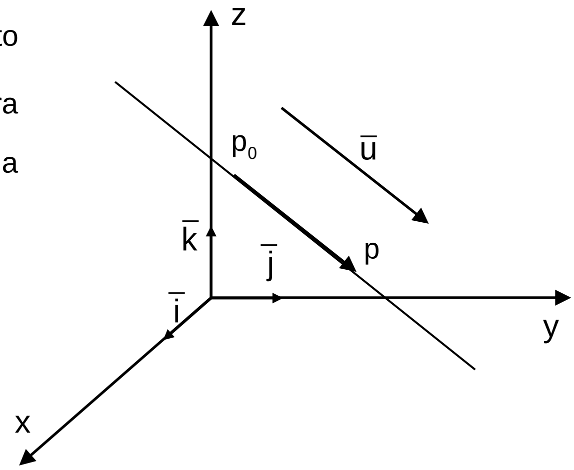


De la definición, resulta:

$$p \in T \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} // \bar{u} \text{ o } \overrightarrow{p_0p} = \bar{o} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{p_0p} = \lambda\bar{u}}_{(**)};\ \forall\lambda \in R$$

A la expresión (**) ***ecuación vectorial*** **de** T paralela (o en la dirección de) al vector $\bar{u}$ que pasa por el punto p_0

Fijado un sistema $\{o;\ \bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k}\}$, en él un punto $p_0(x_0; y_0; z_0)$ y un vector no nulo $\bar{u} = (u_1; u_2; u_3)$, para todo punto $p(x; y; z)$ perteneciente a la recta T paralela a $\bar{u}$ que pasa por p_0 resulta:



$$\overrightarrow{p_0p} = \lambda\bar{u};\ \forall\lambda \in R$$

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) = \lambda(u_1; u_2; u_3)$$

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) = (\lambda u_1; \lambda u_2; \lambda u_3)$$

de donde:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda u_1 \\ y - y_0 = \lambda u_2; \quad \lambda \in R \\ z - z_0 = \lambda u_3 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} x = \boxed{x_0} + \lambda \boxed{u_1} \\ y = \boxed{y_0} + \lambda \boxed{u_2} \; ; \quad \lambda \in R \\ z = \boxed{z_0} + \lambda \boxed{u_3} \end{cases} \qquad (2)$$

Parámetro

Coordenadas del punto de paso

Componentes escalares del vector dirección

A la expresión (2) la llamamos ***ecuaciones paramétricas*** de la recta T que pasa por el punto p_0 y es paralela al vector $\overline{u}$.

ECUACIÓN CANÓNICA

Sea la recta T dada por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\ u_1 \\ y = y_0 + \lambda\ u_2 \; ; \quad \lambda \in R \\ z = z_0 + \lambda\ u_3 \end{cases}$

Suponiendo u_1; u_2 y u_3 distintos de cero, y despejando λ de todas las ecuaciones, resulta:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_0}{u_1} \quad (1) \\ \lambda = \dfrac{y - y_0}{u_2} \quad (2) \; ; \quad \lambda \in R \\ \lambda = \dfrac{z - z_0}{u_3} \quad (3) \end{cases}$$

Igualando (1) con (2) y con (3), obtenemos:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

A esta última expresión la llamamos ***"ecuación canónica de la recta T"*** que pasa por el punto p_0 y es paralela al vector $\overline{u}$.

PROBLEMAS

15) Determina la ecuación canónica de la recta que:

a) es paralela al vector $\overline{u} = (-2;\ 5;\ 1)$ y contiene al punto $p(-6;\ 4;\ 2)$

b) pasa por los puntos $a(5;\ 4;\ -1)$ y $b(-3;\ 1;\ -5)$

16) Dadas las rectas R) $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \; ; \quad \lambda \in R \\ z = -4 + \lambda \end{cases}$ y T) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{2-y}{6} = \dfrac{z-5}{-7}$, determina:

a) un vector paralelo a T

b) si son paralelas

c) un punto de R y otro de T

RECTA DETERMINADA POR LA INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS NO PARALELOS.
PROBLEMAS

17) Dado el plano 3 x + 2 y - 2 z + 5 = 0 y la recta $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda\ ; \quad \lambda \in R \\ z = -2-\lambda \end{cases}$. ¿Existe intersección entre ellos? En caso afirmativo determina analíticamente la misma.

18) Dada la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$, Calcula:

a) sus ecuaciones paramétricas.
b) las coordenadas del punto p para $\lambda = 1$
c) su intersección con el plano "yz"

19) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos p(3; 1; 0) y q(0; 2; -1) y que es paralelo a la recta de intersección de los planos: $2x + z = 3$ y $-x + y + 3z = 12$.

20) ¿Tienen algún punto en común las rectas L y M?

L) $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -3+2\lambda; \quad \lambda \in R \\ z = -2-\lambda \end{cases}$ M) $\begin{cases} x = 17+3\alpha \\ y = 4+\alpha \quad ; \ \alpha \in R \\ z = -8-\alpha \end{cases}$

21) Grafica los siguientes lugares geométricos en distintos sistemas de referencia en el espacio:

a) $\{(x;\ y;\ z)/\ z = 4\}$
b) $\{(x;\ y;\ z)/\ x = 0;\ z = 0\}$
c) $\{(x;\ y;\ z)/\ x = \lambda;\ y = \lambda;\ z = 4;\ \lambda \in R\}$
d) $\{(x;\ y;\ z)/\ x = 3;\ y = 4;\ z = 5\}$
e) $\{(x;\ y;\ z)/\ 3x + 2y = 6;\ z = 0\}$

22) Dados en un $\left\{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right\}$ el punto a(1; 0; -2) y los vectores $\vec{ob} = (-1;\ 1;\ 2)$ y $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$.

Determina:

a) la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{ab}$
b) la ecuación del plano π tal que contenga a la recta $\overleftrightarrow{ab}$ y sea paralelo al vector $\vec{v}$
c) las coordenadas del punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{ab}$ con el plano xy
d) la ecuación de recta S perpendicular al plano xz que pase por el punto a

23) Dados en un $\left\{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right\}$, el punto m (0; 1; -1) y los vectores $\vec{ot} = (1;\ -1;\ 2)$ y $\vec{s} = \vec{i} - \vec{k}$.

Determina justificando las respuestas.

a) ¿Es $\widehat{mto}$ un ángulo recto?
b) Si los puntos m; t y h(0; 2; 1) son coplanares.
c) La recta T tal que $T // \overleftrightarrow{mt} \wedge o \in T$.

24) Determina justificando la respuesta si son V(verdaderas) o F(falsas) cada una de las siguientes proposiciones:

a) Las rectas R) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{-\frac{1}{2}}$ y T) $\begin{cases} 3x-2y+z-2=0 \\ -x+4y+2z+1=0 \end{cases}$ son paralelas.

b) La recta $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda;\ \lambda\in R \\ z=3-\lambda \end{cases}$ es perpendicular al plano 2x + 2y - 2z = 0.

c) Las rectas : $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-3\lambda;\ \lambda\in R \\ z=2+\lambda \end{cases}$ y $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$ son paralelas.

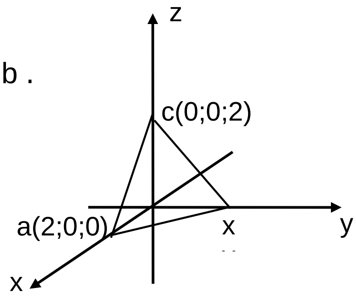
25) Dados la recta R) $\begin{cases} x=1-4\lambda \\ y=2-4\lambda;\ \lambda\in R \\ z=3\lambda \end{cases}$ y el plano π) 6x + 9y - 4z + 12 = 0. Determina si $R\subset\pi$.

26) Dados el plano π) $-2x+3y+2z+6=0$ y la recta M) $\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=2-2\lambda;\quad \lambda\in R \\ z=3-\lambda \end{cases}$. Determina las coordenadas de p y t si $M\cap\pi=\{p\}$ y eje $z\cap\pi=\{t\}$.

27) Dado el plano π de la figura. Determina:

a) su ecuación segmentaria

b) la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por b .

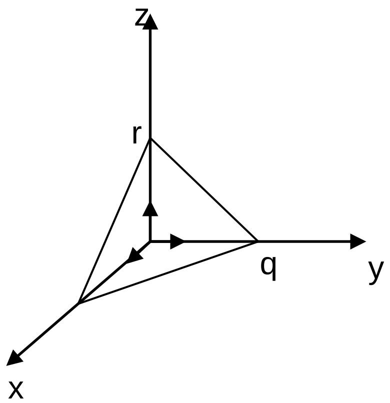


RESPUESTAS

Plano

1. $2x-z=0$

2.
   a. Demostración a cargo del alumno
   b. Intersección con el eje x $\rightarrow$ $(p;0;0)$
      Intersección con el eje y $\rightarrow$ $(0;q;0)$
      Intersección con el eje z $\rightarrow$ $(0;0;r)$



3.

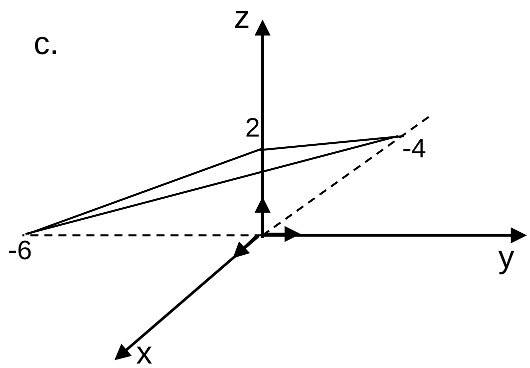
a. $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{2}=1$

b. Intersección con el eje x $\rightarrow$ $(-4;0;0)$

Intersección con el eje y $\rightarrow$ $(0;-6;0)$

Intersección con el eje z $\rightarrow$ $(0;0;2)$

c.



4. $4x-4z+12=0$

5. Se determinan características, las representaciones a cargo del alumno

a. Plano perpendicular al vector $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1\right)$
b. Plano paralelo al eje x
c. Punto en un eje
d. Recta en el plano xy paralela al eje y
e. Plano paralelo al plano yz

6.

a. Paralelo al eje x
b. Paralelo al eje y
c. Paralelo al eje z
d. Paralelo al plano xy
e. Paralelo al plano yz
f. Paralelo al plano xz

7. $\delta)\ 4x+3y+z-6=0$

8. $\varphi)\ 13x-y+3z-17=0$

9. Demostración a cargo del alumno

10. $\frac{3}{\sqrt{14}}$

11. $3x+y-5z+87=0 \vee 3x+y-5z-53=0$

12. $2x-3y+z-5=0$

13. a. F b. F c. F d. F e. V

14. a. $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}$ b. $\frac{2}{\sqrt{6}}$

Recta en el espacio

15. a. $\frac{x+6}{-2}=\frac{y-4}{5}=z-2$ b. $\frac{x-5}{-8}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+1}{-4}$

16. a. Un vector paralelo a T puede ser $(3;-6;-7)$
    b. No son paralelos c. $(0;1;-4)\in R$ y $(-1;2;5)\in T$

17. Si existe intersección y es el punto $\left(-\frac{3}{7};-\frac{10}{7};\frac{3}{7}\right)$

18. a. posibles ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=3 \\ y=5+\lambda;\ \lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}$
    b. $(3;6;1)$ c. no existe intersección con el plano "yz"

19. $5x-7y-22z-8=0$

20. Si, $(2;-1;-3)$

21. A cargo del alumno

22. a. $\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=\lambda \quad ;\ \lambda\in R \\ z=2+4\lambda \end{cases}$ b. $\pi)$ - $5x-2y-2z+1=0$
    c. $\left(0;\frac{1}{2};0\right)$ d. $\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda\ ;\ \lambda\in R \\ z=-2 \end{cases}$

23. a. $\hat{mto}$ no es recto c. $T)\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda;\ \lambda\in R \\ z=3\lambda \end{cases}$
    b. Si

24. a. F b. V c. F

25. R no está incluida en π

26. $p\left(-\frac{13}{3};-\frac{14}{3};-\frac{1}{3}\right)$ y $t(0;0;-3)$

27. a. $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ b. por ejemplo $R)\begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda;\ \lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}$