Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

La Recta del Plano

4º Año

Cód. 1404-15

Prof. María del Luján Martínez
Prof. Juan Carlos Bue
Prof. Mirta Rosito
Prof. Verónica Filotti
Dpto. de Matemática

Matemática

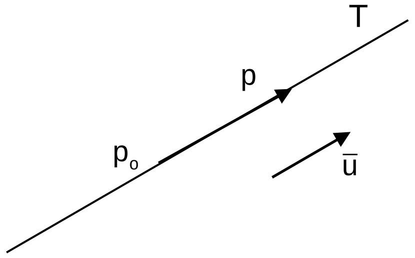
Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

LA RECTA DEL PLANO

ECUACIÓN VECTORIAL Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Recordar:
Lugar geométrico (L.G.) es el conjunto de todos los puntos y solo aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones dadas.

La recta en el plano como lugar geométrico
Dados un punto p_0 y un vector no nulo $\overline{u}$, la recta T paralela a $\overline{u}$ que pasa por p_0 es el lugar geométrico de los puntos p tales que $\overrightarrow{p_0p} // \overline{u}$ o $\overrightarrow{p_0p} = \overline{o}$.



De la definición anterior, podemos concluir:

$$p \in T \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} // \overline{u} \text{ o } \overrightarrow{p_0p} = \overline{o} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{p_0p} = \lambda\overline{u}}_{(1)};\ \forall\lambda \in R$$

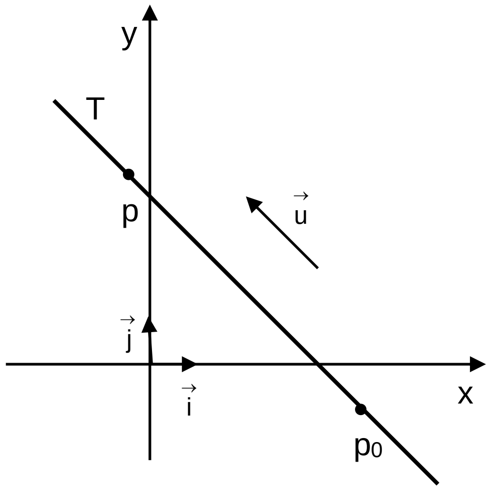
A la expresión (1) ***ecuación vectorial* de** la recta T paralela a $\overline{u}$ que pasa por p_0.

<u>Observación</u>:

Para distintos valores reales de λ se obtienen distintos puntos p pertenecientes a la recta. En particular para $\lambda = 0$ obtenemos el punto p_0.

Fijado un sistema $\{o;\ \overline{i};\ \overline{j}\}$, y en él un punto $p_0(x_0;\ y_0)$ y un vector no nulo $\overline{u} = (u_1;\ u_2)$, para todo punto $p(x;\ y)$ perteneciente a la recta T paralela a $\overline{u}$ que pasa por p_0 resulta:

$$\overrightarrow{p_0p} = \lambda\overline{u};\ \forall\lambda \in R$$



$$(x - x_0;\ y - y_0) = \lambda(u_1;\ u_2) \Leftrightarrow (x - x_0;\ y - y_0) = (\lambda u_1;\ \lambda u_2)$$

de donde: $\begin{cases} x - x_0 = \lambda u_1 \\ y - y_0 = \lambda u_2 \end{cases};\ \lambda \in R$

Es decir:

$$T)\begin{cases} x = \boxed{x_0} + \lambda \boxed{u_1} \\ y = \boxed{y_0} + \lambda \boxed{u_2} \end{cases} ; \ \lambda \in R \qquad (2)$$

Parámetro

Coordenadas del punto de paso

Componentes escalares del vector dirección

A la expresión (2) la llamamos ***ecuaciones paramétricas*** de la recta T que pasa por p_0 y es paralela al vector $\bar{u}$.

<u>Ejemplo</u>:

Dados el punto b(-2; 3) y el vector $\bar{u} = (-1;\ 4)$, determina:

a) la ecuación vectorial de la recta A que tiene la dirección de $\bar{u}$ y pasa por b.
b) las ecuaciones paramétricas de A
c) los puntos de la misma para los siguientes valores del parámetro:

$$\lambda = 1 ;\ \lambda = \frac{1}{2} ;\ \lambda = -3$$

d) si t(4 ;5) pertenece a A
e) para que valores de λ se obtendrán los puntos simétricos de los anteriores con respecto b

<u>Solución</u>:

a) la ecuación vectorial es $(x+2; y-3) = \lambda(-1; 4)$ con $\lambda \in R$

b) Las ecuaciones paramétricas de A son : $\begin{cases} x = -2 + (-1)\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$; $\lambda \in R$

c) Si $\lambda = 1 \Rightarrow b_1(-3;\ 7)$; si $\lambda = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b_2\left(-\dfrac{5}{2};\ 5\right)$ y si $\lambda = -3 \Rightarrow b_3(1;\ -9)$

d) Reemplazando el punto en la recta A, resulta

$\begin{cases} 4 = -2 + (-1)\lambda \\ 5 = 3 + 4\lambda \end{cases} ;\ \lambda \in R \ \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -6 \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ por lo tanto el punto t no pertenece a la recta A.

e) Para $\lambda=-1$; $\lambda=-\frac{1}{2}$; $\lambda=3$ se obtendrán los puntos simétricos del apartado anterior; ya que si b_1' es el simétrico de b_1, con respecto a b, entonces $\overrightarrow{b_1b}=\overrightarrow{bb_1'}$.

ECUACIÓN CANÓNICA

Sea una recta T dada por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=x_0+\lambda\cdot u_1 & (a) \\ y=y_0+\lambda\cdot u_2 & (b) \end{cases}$; $\lambda\in R$

Suponiendo u_1 y u_2 distintos de cero, y despejando λ de (a) y de (b), resulta:

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{x-x_0}{u_1} & (1) \\ \lambda=\dfrac{y-y_0}{u_2} & (2) \end{cases} \quad ; \ \lambda\in R$$

Igualando (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}$$

A esta última expresión la llamamos "***ecuación canónica de la recta T***".

PROBLEMAS

1) Determina la ecuación canónica de la recta que:

a) es paralela al vector $\bar{u}=(-2;\ 5)$ y contiene al punto $(-6;\ 4)$

b) pasa por los puntos $a(5;\ 4)$ y $b(-3;\ 1)$

c) es perpendicular al vector $\bar{n}=(8;\ -3)$ y pasa por el origen de coordenadas

2) Dadas las rectas $R)\begin{cases} x=1-3\lambda \\ x=-4+\lambda \end{cases}$; $\lambda\in R$ y $T)\dfrac{x+5}{8}=\dfrac{4-y}{5}$, determina:

a) un vector paralelo a T

b) si son paralelas

c) un punto de R y otro de T

d) la distancia del punto $(-1;\ 2)$ a la recta T

ECUACIÓN CARTESIANA

Sea la recta T dada por su ecuación canónica $\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{y-y_0}{u_2}$ (3)

Trabajando algebraicamente en (3) resulta:

$$u_2(x - x_0) = u_1(y - y_0)$$

$$u_2x - u_2x_0 = u_1y - u_1y_0$$

$$u_2x - u_2x_0 - u_1y + u_1y_0 = 0$$

$$u_2x - u_1y + (-u_2x_0 + u_1y_0) = 0 \qquad (4)$$

Si reemplazamos en (4) a u_2 por a; $-u_1$ por b y $-u_2x_0 + u_1y_0$ por c, obtenemos:

$$ax + by + c = 0$$

A esta última expresión la llamamos "***ecuación cartesiana de la recta T dada por los coeficientes directores a y b***".

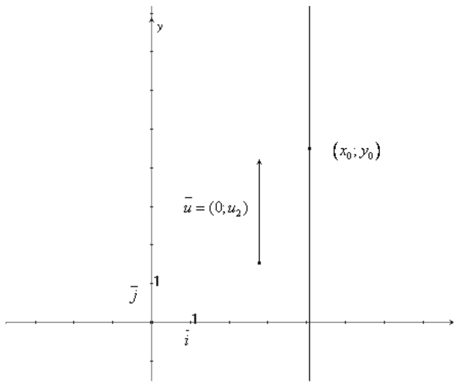
Notemos que:

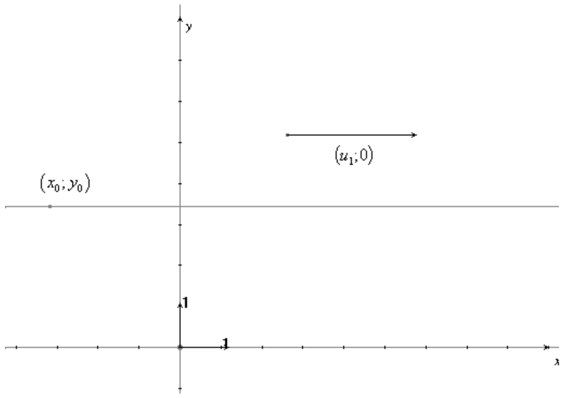
- el vector $(u_1; u_2) = (-b; a)$ es el que da la dirección de la recta, pues es paralelo a la recta.
- el vector $(a; b)$ verifica que $(a; b) \times (-b; a) = a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$, por lo tanto $(a; b)$ es perpendicular a $(-b; a)$. Entonces en la ecuación cartesiana de una recta, los coeficientes de x e y, en ese orden, dan las componentes de un vector perpendicular a la misma.

En particular:

∗ Si $u_1 = 0$, resulta que $\bar{u} = (0; u_2)$ o sea $\bar{u} // \bar{j}$. Las distintas ecuaciones de una recta paralela a $\bar{u} = (0; u_2)$ (paralela al eje y) que pase por $(x_0; y_0)$ son:

  - paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 \end{cases}$; $\lambda \in R$
  - cartesiana $x = x_0$





* Si $u_2 = 0$, la recta es paralela al eje x y sus ecuaciones son:
  - paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot u_2 \\ y = y_0 \end{cases}$; $\lambda \in R$
  - cartesiana $y = y_0$

<u>Definición:</u>

> Dadas las constantes $a; b; c \in R$ con a y b no simultáneamente nulas, se llama ecuación lineal en dos variables x e y la expresión: $ax + by + c = 0$ donde a y b son los coeficientes y c es el término independiente.

Teniendo en cuenta la definición anterior, resulta:

> La ecuación de una recta es una ecuación lineal en dos variables.

<u>Ejemplos</u>:

a) Dado el punto $p(2;\ -4)$ y el vector $\bar{v} = (-8;\ 6)$, determina la ecuación cartesiana de la recta R que pasa por p y es paralela al vector $\bar{v}$.

   <u>Solución</u>:

   Como $\bar{v} = (-8;\ 6)$// R $\Rightarrow$(6; 8) $\perp$R, es decir (a; b) = (6;8) reemplazando en la ecuación:

   $ax + by + c = 0$ resulta

   $6x + 8y + c = 0$ pero $p \in R$

   $6.2 + 8.(-4) + c = 0 \Rightarrow c = 20,$ luego:

   $6x + 8y + 20 = 0$ es la ecuación de la recta R, o lo que es lo mismo, su equivalente:

   $3x + 4y + 10 = 0$

b) Halla la ecuación cartesiana de la recta T perpendicular al vector $\overline{n} = (1;\ -3)$ que contiene al origen de coordenadas.

Solución:

Como $\overline{n} = (1;\ -3)\ \perp$ T, reemplazando en:

$ax + by + c = 0$ resulta

$x - 3y + c = 0$ como $(0;\ 0) \in T$

$0 - 3.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0,$ luego:

$x - 3y = 0$ es la ecuación cartesiana de la recta T, o su equivalente $-x + 3y = 0$

PROBLEMAS

3) La recta M tiene como ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - \lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$; $\lambda \in R$, determina.

a) Un punto perteneciente a M.
b) Un vector paralelo a dicha recta.
c) El gráfico de M.
d) Las coordenadas de los puntos de intersección de M con los ejes coordenados.

4)

a) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta S que contiene al punto b (-1; 4) y es paralela al vector $\overline{u} = (5;\ -2)$.
b) ¿Cómo determinarías un punto q, distinto de b, que pertenezca a la recta S?. Justifica
c) ¿Pertenece el punto de coordenadas (1; -2) a la recta S? Justifica.

5) Dados los puntos $(-1;\ 3)$ y $(-2;\ 4)$, obtiene la ecuación de la recta que ellos determinan.

6) Sea R la recta $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases}$; $\lambda \in R$ y el punto $c(2;\ -1)$. Halla las coordenadas de los puntos de R que están a $\sqrt{5}$ unidades de distancia del punto c.

7) Determina las coordenadas del punto p', simétrico de p (0; 2) respecto de la recta de ecuación $y = 0{,}5x - 3$. Grafica la situación.

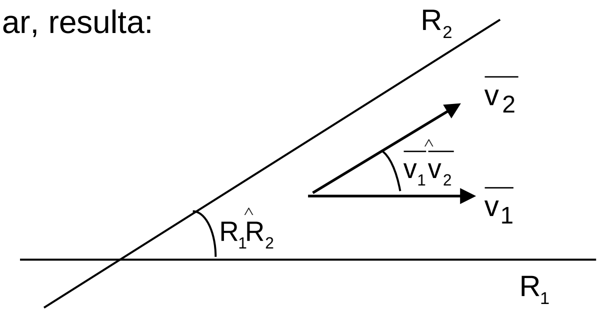
ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Definición:

> El ángulo entre dos rectas R_1 y R_2 coincide con el ángulo que forman un par de vectores paralelos a cada una de ellas o su suplementario.
>
> Simbólicamente: $\widehat{R_1 R_2} = \widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2}$, siendo $\overline{v_1} // R_1$ y $\overline{v_2} // R_2$

Recordando la definición de producto escalar, resulta:

$$\widehat{R_1 R_2} = \widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2} = \arccos\left(\frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| . |\vec{v}_2|}\right)$$



DOS POSICIONES MUY PARTICULARES

- **RECTAS PARALELAS**

Si dos rectas $R_1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $R_2)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son paralelas, debe ocurrir que los vectores que definen la dirección de las mismas sean paralelos, es decir:

$$R_1 // R_2 \Leftrightarrow (-b_1;\ a_1) // (-b_2;\ a_2) \Leftrightarrow (-b_1;\ a_1) = \alpha.(-b_2;\ a_2) \quad \alpha \in R;\ \alpha \neq 0$$

Entonces: $$\left.\begin{array}{l} b_1 = \alpha.b_2 \\ a_1 = \alpha.a_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{con } a_2 \neq 0 \text{ y } b_2 \neq 0$$

> Los cocientes de los coeficientes en x e y de las rectas dadas son directamente proporcionales.

Notemos que si alguna de las componentes de un vector es nula deberá ser nula la correspondiente en el otro vector dirección.

- **RECTAS PERPENDICULARES**

Si dos rectas $R_1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $R_2)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son perpendiculares, debe ocurrir que:

$$\cos \widehat{R_1R_2} = \cos \widehat{\overline{v_1}\,\overline{v_2}} = \frac{\overline{v_1} \times \overline{v_2}}{\left|\overline{v_1}\right| \cdot \left|\overline{v_2}\right|} = 0 \text{, siendo } \overline{v_1} = (-b_1; a_1) \ // \ R_1 \text{ y } \overline{v_2} = (-b_2; a_2) \ // \ R_2$$

Entonces:

$$\frac{\overline{v_1} \times \overline{v_2}}{\left|\overline{v_1}\right| \cdot \left|\overline{v_2}\right|} = 0 \Leftrightarrow \overline{v_1} \times \overline{v_2} = 0 \Leftrightarrow (-b_1; a_1) \times (-b_2; a_2) = 0 \Leftrightarrow b_1b_2 + a_1a_2 = 0 \Leftrightarrow b_1b_2 = -a_1a_2$$

O lo que es equivalente:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1 \quad \text{con } b_1 \neq 0 \text{ y } b_2 \neq 0$$

Notemos que si la primera de las componentes de uno de los vectores es nula deberá ser nula la segunda del otro vector (las rectas perpendiculares en este caso son paralelas a los ejes coordenados).

Piensa y responde:
¿Qué significa geométricamente que:

- sea $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$?
- sea $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$?
- sea $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$?

Ejemplos:

a) Determina la ecuación cartesiana de una recta T paralela a S, no coincidente, siendo $S)\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 5\lambda \end{cases};\ \lambda \in R$

Solución:

Como $\overline{u} = (1 : -5)$ es paralelo a S, resulta que T podría ser: -5 x - y + 14 = 0.

b) Si W es la recta de ecuación: 2 x - y + 3 = 0, determina la ecuación de una recta L tal que L perpendicular a W.

Solución:

El vector (2 ; -1) es perpendicular a W, por lo tanto dicho vector es paralelo a L. La ecuación podría ser: x + 2 y - 5 = 0.

PROBLEMAS

8) abcd es un paralelogramo con $\overline{ab} // \overline{cd}$. El vértice a tiene coordenadas (1; 1), el lado $\overline{cd}$ está contenido en la recta de ecuación 3 x – y + 1 = 0. Los otros lados son paralelos al eje y. Se sabe además que la recta que pasa por los puntos (0; -6) y (-1; -10) contiene al vértice c. Grafica la situación y determina analíticamente las coordenadas de los vértices del paralelogramo.

9) Dada las rectas $T)\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 3-2\lambda \end{cases}$; $\lambda \in R$ y $S)\ -x-y-8=0$, determina:

a) la medida del ángulo que forman

b) las coordenadas del punto de intersección de las mismas

10) Dado el triángulo abc con vértices a (-1; 0), b (5; 0) y c (2; 3), halla la ecuación de la recta que contiene a la mediana correspondiente al lado $\overline{ab}$.

11) Los puntos a(1; 1), b(-1; 3), c(1 ; 5) y d(5; 5) son los vértices de un cuadrilátero.

a) Justifica que abcd es trapecio rectángulo

b) Indica la ecuación de la recta que contiene a la base media del abcd.

ECUACIÓN EXPLÍCITA

Dada la recta $R)\ ax+by+c=0$ con $b \neq 0$, resulta:

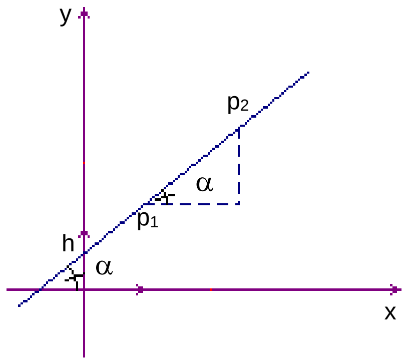
$$ax+by+c=0 \iff by=-c-ax \iff y=\frac{-c-ax}{b} \iff y=\underbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}_{m}x+\underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_{h}$$

De donde:

$$y = mx + h$$

A esta nueva ecuación la llamamos “***ecuación explícita de la recta*** R”.

Interpretación de "m" y "h"



Si $x = 0 \Rightarrow y = m0 + h \Rightarrow y = h$; es decir, el punto $p(0;h)$ pertenece a la recta y es el punto de intersección de la misma con el eje de las ordenadas (eje y). Al número h lo llamamos "***ordenada al origen***".

Si tomamos dos puntos $p_1(x_1;y_1)$ y $p_2(x_2;y_2)$ cualesquiera de la recta, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = mx_2 + h \\ y_1 = mx_1 + h \end{array}\right\} \Rightarrow tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + h - mx_1 - h}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

De lo anterior podemos concluir que el número m es la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con el sentido positivo del eje de las abscisas (eje x).

Ejemplo:

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto q(0 ; -3) y forma un ángulo de 135° con el sentido positivo del eje x.

Solución:
La recta buscada será de la forma:

$$y = m\,x + h$$

Como h = -3 $\Rightarrow$ y = m x - 3, además m = tg 135° = -1, luego su ecuación es:

$$y = -x - 3$$

ECUACIÓN SEGMENTARIA

Dada una recta $R)\ ax + by + c = 0$ con $a \neq 0$; $b \neq 0$ y $c \neq 0$, es decir, **no paralela a los ejes ni que pase por el origen de coordenadas**, resulta:

$$ax + by + c = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} ax + by = -c \underset{(2)}{\Rightarrow} \frac{a}{-c}x + \frac{b}{-c}y = 1 \underset{(3)}{\Rightarrow} \frac{x}{\underbrace{\left(-\frac{c}{a}\right)}_{p}} + \frac{y}{\underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_{q}} = 1$$

(1) Sumando (-c) a ambos miembros.

(2) Multiplicando por $\frac{1}{-c}$ a ambos miembros.

(3) Definición de división.

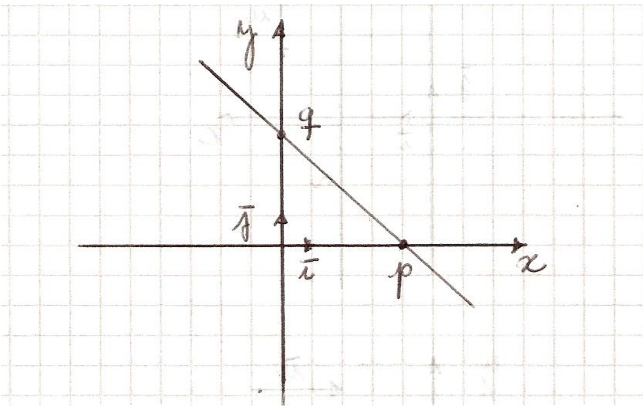
De donde:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Esta última expresión es la "***ecuación segmentaria de la recta*** R".

Observación:

- Si $y = 0 \Rightarrow \frac{x}{p} = 1 \Leftrightarrow x = p \;\Rightarrow$ el punto $(p; 0)$ es el punto de intersección de la recta con el eje x y al número p lo denominamos ***abscisa al origen***
- Si $x = 0 \Rightarrow \frac{y}{q} = 1 \Leftrightarrow y = q \;\Rightarrow$ el punto $(0; q)$ es el punto de intersección de la recta con el eje y y al número q lo denominamos ***ordenada al origen***



Es evidente la utilidad de expresar a la ecuación de una recta, no paralela a los ejes ni que pase por el origen de coordenadas, en su forma segmentaria ya que facilita enormemente su representación gráfica

PROBLEMAS

12) Sea la recta $T)\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}; \; \lambda \in R$

a) Representa de ella sólo los puntos correspondientes a $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$
b) ¿Pertenece El punto p(2 ; 3) a T? Justifica.
c) Calcula el ángulo formado por las rectas T y S siendo S $S)\, \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$
d) Escribe la ecuación cartesiana de T y grafícala.
e) Halla el punto de abscisa 18 que pertenece a T.

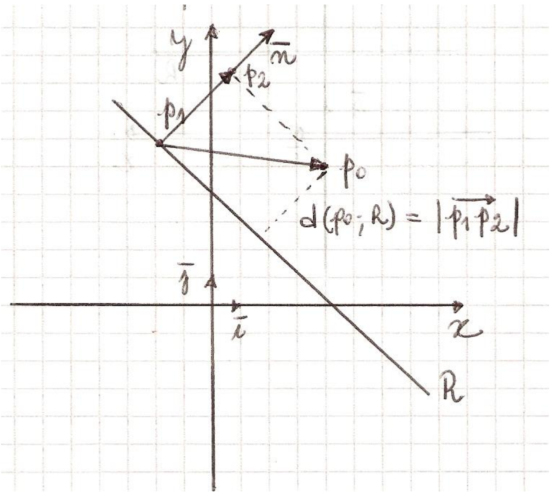
13) Dados en un $\{0; \bar{i}; \bar{j}\}$, las rectas $R_1)\; x - y = 2$ y $R_2)\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}; \; \lambda \in R$, determina:

a) Las coordenadas de p tal que $R_2 \cap \text{eje } x = \{p\}$
b) La ecuación de la recta R_3, en forma segmentaria, tal que $R_3 \perp R_2$ y que contenga al punto (0; 3)
c) La ecuación de la recta R_4, en forma explícita, tal que $R_4 \,//\, R_1$ y su abscisa al origen es -2.

14) La recta $x+y-2=0$, y una recta paralela a ella que pasa por el punto (0; 5) determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. ¿Cuál es su área?

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Analizaremos a continuación el problema de cómo calcular la distancia desde un punto p_0 cualquiera a una recta R (p_0 no perteneciente a R). Para ello te proponemos algunas estrategias de solución.



Procedimiento 1

Ubica R y p_0 en un gráfico y luego realiza los siguientes pasos:

i. ubica un punto p_1 cualquiera de R.
ii. determina $\overrightarrow{p_1p_0}$
iii. considera un vector $\bar{n}$ normal (perpendicular) a R
iv. la distancia de p_0 a R esta dada por

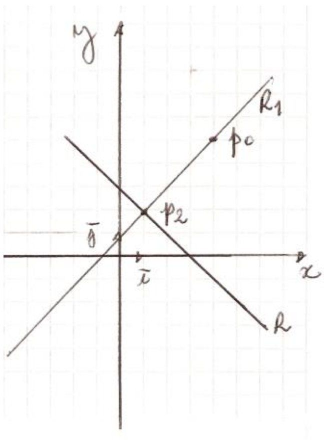
$$\text{dist}(p_0;R)=\left|\text{proy}_{\bar{n}}\overrightarrow{p_1p_0}\right|$$

Procedimiento 2

Ubica R y p_0 en un gráfico y luego realiza los siguientes pasos:

i. determina la ecuación de una recta R_1, perpendicular a R que pase por p_0
ii. halla $R \cap R_1 = \{p_2\}$
iii. la distancia de p_0 a R esta dada por

$$\text{dist}(p_0;R)=\text{dist}(p_0;p_2)=\left|\overrightarrow{p_0p_2}\right|$$



PROBLEMAS

15) Dados la recta $R)\, ax+by+c=0$ y el punto $p(x_1;y_1)$, demuestra que la distancia desde el punto $p(x_1;y_1)$ a la recta de ecuación R es $\text{dist}(p;R)=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

16) Dada la recta de ecuación $R)\ x - y = 1$, determina:

a) La distancia de $p(-1;3)$ a R.

b) La distancia entre R y $M)\ x - y = 3$.

PROBLEMAS ADICIONALES

17) Al triángulo abc, donde $a(4;2)$; $b(1;6)$ y $c(2;1)$ se le aplica una $S_{\overleftrightarrow{ac}}$, obteniéndose el triángulo $a'b'c'$. Realiza el gráfico y determina las coordenadas de los vértices del nuevo triángulo.¿Algunas coordenadas coinciden con las del triángulo abc?.¿Por qué?

18) Determina la ecuación de la recta que contiene al punto (-2; 5) y:

a) es paralela a la recta de ecuación –3x +2y – 1=0

b) es perpendicular a la recta de ecuación x + 2y – 1 = 0

c) al origen de coordenadas.

19) Determina la ecuación y grafica el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de a(3; 1) y b(0; -2).

20) Determina analíticamente si los puntos a(0; 1), b(2; 3) y c(-1; -2) están alineados.

21) Encuentra la ecuación cartesiana de la recta que corta al eje x en (-3; 0) y forma un ángulo de 60º con dicho eje.

22) Determina la ecuación segmentaria de una recta que es paralela al vector $(-3;3)$ y pasa por el punto (4; 1).

23) Justifica que los puntos a(0; 3); b(2; 0) y c(2,5; 2,5) son los vértices de un triángulo rectángulo. Luego determina:

a) el punto intersección de las mediatrices de los catetos

b) el punto medio de la hipotenusa. ¿qué puedes concluir?

24) Determina en cada caso, la ecuación de la recta R tal que $p_0(-2;-1) \in R$ y

a) es perpendicular al vector $\vec{u} = (-5;-2)$

b) es perpendicular al eje x

c) es perpendicular al eje y

d) tiene la dirección de la bisectriz del 2do y 4to cuadrante.

25) Determina α de modo que las rectas $R_1)\ 2\alpha x + \alpha y - 1 = 0$ y $R_2)\ \alpha x - y + 2 = 0$ sean:

a) Paralelas.

b) Secantes

26) Analiza el paralelismo o perpendicularidad de los siguientes pares de rectas. En el caso de ser secantes determina el punto de intersección.

a) $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ \frac{2}{3}x-y+4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-2=0 \\ x+\frac{2}{3}y-4=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-3y+7=0 \\ 6x+2y-1=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x+2y+5=0 \end{cases}$

27) Escribe la ecuación de la recta R en la forma que más se adecua a los datos suministrados en cada uno de los siguientes casos:

a) Corta a los ejes en los puntos (-2; 0) y (0; -1).

b) Corta al eje x en el punto (-1; 0) y forma con el sentido positivo del mismo, un ángulo de 45º.

c) Corta al eje y en el punto (0; -1) y forma con el semieje positivo de las x un ángulo de 60º.

28) Dada la ecuación de R, en cada caso determina, si es posible, la pendiente, la abscisa y la ordenada al origen de la misma:

a) $2x-y+3=0$

b) $-3x-5y=2$

c) $-x+y=0$

d) $y=-x+\frac{1}{2}$

e) $\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1-\lambda \end{cases}$; $\lambda \in R$

f) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$

29) Determina la ecuación de la recta R si sabes que interseca a los ejes coordenados en los puntos (-3; 0) y (0; -1).

30) Demuestra que la recta que pasa por los puntos $p(x_0;y_0)$ y $q(x_1;y_1)$ tales que $y_0 \neq y_1$ tiene por ecuación: $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0)$

31) Coloca V (verdadero) o F(falso) justificando tu respuesta:

a) El área del triángulo determinado por las rectas $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$; $-4x-3y+34=0$ y $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ es 37,5.

b) Las rectas M) $x+\frac{y}{2}=1$ y S) $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=4-2\lambda \end{cases}$; $\lambda \in R$ tienen la misma ordenada al origen.

c) La ecuación segmentaria de la recta T, que pasa por p(-2; 3) y es perpendicular a la recta $-4x-3y-5=0$ es $\frac{x}{-6}+\frac{y}{\frac{9}{2}}=1$.

d) La pendiente de la recta que contiene a la altura ad del triángulo abc es $-\frac{2}{3}$, siendo a(-2; 5), b(6; 2) y c (0; -4).

Respuestas

1)

a) $\frac{x+6}{-2}=\frac{y-4}{5}$ b) $\frac{x-5}{-8}=\frac{y-4}{-3}$ c) $\frac{x}{3}=\frac{y}{8}$

2)

a) $(8;-5)$

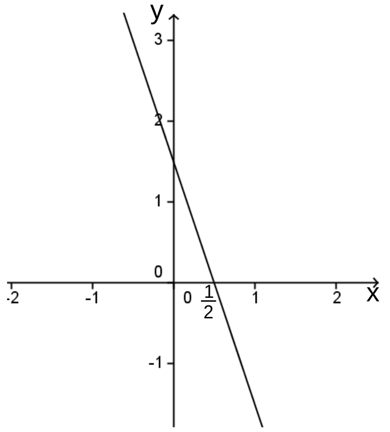
b) No son paralelas pues $(-3;1)//R$; $(8;-5)//T$ y el vector $(-3;1)$ no es paralelo al vector $(8;-5)$

c) $(1;-4)\in R$ y $(-5;4)\in T$ d) $\frac{4\sqrt{89}}{89}$

3)

a) Si $\lambda=1$, entonces $\left(-\frac{1}{2};3\right)\in M$ b) $\vec{u}=(-1;3)$

c)



d) El punto de intersección con el eje x es $\left(\frac{1}{2};0\right)$ y el punto de intersección con el eje y es $\left(0\ ;\ \frac{3}{2}\right)$

4)

a) $\begin{cases} x=-1+5\lambda \\ y=4-2\lambda \end{cases}$; $\lambda\in R$

b) Si $\lambda\neq 0$ el punto que se obtiene es distinto del punto b. Por ejemplo si $\lambda=-1$, el punto de coordenadas (-6; 6) pertenece a S

c) El punto (1; -2) no pertenece a S, pues:

si $x=1\Rightarrow\lambda=\frac{2}{5}$ y para dicho valor de λ el valor de y sería $\frac{16}{5}$ y no -2

5) R) $\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=3+\lambda \end{cases}$; $\lambda\in R$ 6) Los puntos son (3; -3) y (1; 1) 7) (4; -6)

8) Las coordenadas de los vértices del paralelogramo son: a(1; 1); b(7;19); c(7; 22) y d(1; 4)

9)

a) El ángulo entre las rectas T y S es de 71º 33’ 54’’

b) $(-3;-5)$

10) La ecuación de la recta es x = 2

11)

a) Para que abcd sea un trapecio rectángulo, debemos probar que $\overline{bc} // \overline{ad}$ y que $\overline{bc} \perp \overline{ba}$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{bc} = (2; 2) \\ \overrightarrow{ad} = (4; 4)\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow \overrightarrow{bc} // \overrightarrow{ad} \\ \overrightarrow{bc} \times \overrightarrow{ba} = (2; 2) \times (2; -2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{bc} \perp \overrightarrow{ba}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{abcd es un trapecio rectángulo}$$

b) La ecuación es: -2x + 2y – 4 = 0

12)

a) Si $\lambda = 2 \Rightarrow (9; -1)$ y si $\lambda = -1 \Rightarrow (-3; 5)$

b) El punto p no pertenece a T

c) El ángulo formado por T y S es 60º 15' 18''

d) La ecuación de la recta T es $\frac{1}{2}x + y - \frac{7}{2} = 0$

e) Las coordenadas del punto son $\left(18; -\frac{11}{2}\right)$

13)

a) p(3; 0)

b) La ecuación de la recta R_3 es $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = 1$

c) La ecuación de la recta R_4 es y = x + 2

14) El área del trapecio es $\frac{21}{2}$

15) Para demostrar que $\text{dist}(p; R) = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, utilizaremos el procedimiento 1

Entonces:

1º) tomamos un punto $p(x_0; y_0) \in R \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow c = -ax_0 - by_0$ (1)

2º) determinamos el vector $\overrightarrow{p_1p} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$

3º) armamos un vector $\overline{n}$ normal (perpendicular) a la recta R, por ejemplo, $\vec{n} = (a; b)$

4º) la distancia de p a R esta dada por

$$\text{dist}(p;R) = \left|\text{proy}_{\overline{n}} \overrightarrow{p_1p}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{p_1p} \times \overline{n}}{|\overline{n}|}\right| = \left|\frac{(x_1 - x_0; y_1 - y_0) \times (a; b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{(x_1 - x_0).a + (y_1 - y_0).b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{ax_1 + by_1 - ax_0 - by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \overset{(1)}{=} \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

16)

a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$