Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario

Universidad Nacional de Rosario

Funciones

1° AÑO

Cod. 1103-15

Prof. Juna Carlos Bue
Prof. María Verónica Fillotti

Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

FUNCIONES. IDEAS GENERALES

A diario, se presentan situaciones donde se pueden observar relaciones que existen entre dos conjuntos de objetos; como se muestran por ejemplo mediante gráficos, cartogramas, curvas, tablas, etc. Esto es familiar a todo aquél que lee los periódicos o mira televisión.

En realidad se trata de describir relaciones entre dos conjuntos, en forma cuantitativa o cualitativa.

Algunos tipos de estas relaciones los matemáticos las llaman ***funciones***. Así como:

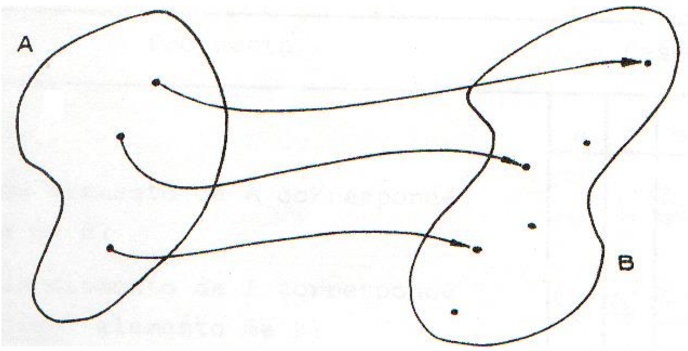
- A cada persona le hacemos corresponder su documento nacional de identidad.
- A cada libro que se produce le hacemos corresponder su ISBN.
- A cada número natural le hacemos corresponder su doble.
- A cada alumno de este curso le hacemos corresponder su pupitre.
- A cada cubo de arista x le corresponde x^3 como su volumen.

La palabra "***función***" fue introducida en Matemática por Leibniz (1673), que utilizaba este término para designar cierto tipo de fórmulas matemáticas. Más tarde se vio que la idea de función de Leibniz tenía un alcance muy reducido, y posteriormente el concepto de función fue experimentando generalizaciones progresivas.

Actualmente la definición de función es la siguiente:

FUNCIÓN: es la terna formada por dos conjuntos y una ley tal que a cada elemento del primer conjunto le hace corresponder un único elemento del segundo conjunto.

Si visualmente esta correspondencia la indicamos por una flecha que parte de cada elemento del conjunto A y llega a un único elemento que le corresponde del conjunto B, resulta:



La representación anterior, recibe el nombre de ***diagrama sagitario***

Veamos una situación en la que podemos identificar una función:
Sea:

M = {Alumnos de una división de 1° año del Instituto Politécnico Superior}

P = { 1 ; 2 ; 3 ; 4; 5;.... 35}

y la ley que establece la vinculación entre M y P es :

"a cada alumno hacerle corresponder el número de orden de la lista del curso"

¿De cada elemento de M cuántas flechas parten?..

¿Definen M, P y la ley una función?.......................................

¿Por qué?..

Consideremos ahora el conjunto M dado anteriormente, el conjunto T = { 1, 3 , 5 , 7 ,9 }

y la ley :

"a cada alumno hacerle corresponder el dígito con que termina su Documento Nacional de Identidad"

CONTESTA

¿A cada elemento de M le corresponde un elemento de T?...

¿Por qué?...

¿Definen M, T y la ley dada una función?...

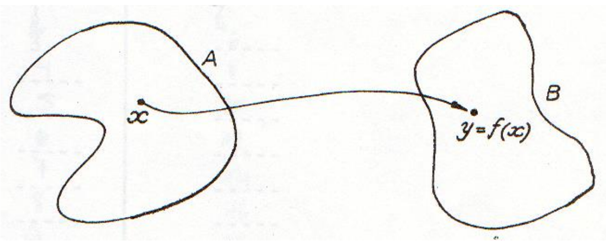
En caso negativo modifica el segundo conjunto para que esta relación resulte una función………………………………………………………………………………………

A continuación introduciremos algunas definiciones y símbolos que utilizaremos para trabajar con las funciones.

- A la ley que vincula los conjuntos la representamos con letras minúsculas f, g, h, etc.
- Al primer conjunto o conjunto de partida lo denominamos ***dominio*** de la función. En general al dominio de la función lo simbolizaremos Dom (.......) colocando dentro del paréntesis la letra con que nombramos a la ley, así Dom (f) ; Dom (g) ...etc. o bien subindicando el nombre del conjunto de partida con el nombre de la ley, por ejemplo A_f.
- Al segundo conjunto se lo llama conjunto de llegada
- A un elemento genérico del dominio lo simbolizamos con la letra **x** (variable independiente) y al que le corresponde en el conjunto de llegada lo simbolizaremos con **y** (variable dependiente) denominada "imagen de **x** por aplicación de la ley dada".
- Si con " f " simbolizamos una ley cualquiera resultará:
    - $f(x)$ se lee "efe de x"
    - $x \to y = f(x)$ se lee "a x le corresponde y, que es imagen de x por aplicación de la ley f ".
    - Si A es el conjunto de partida y B el de llegada también podemos escribir:

$$f : A \to B / x \in A, y = f(x) \in B$$

- Utilizando el diagrama sagitario resulta:



- El conjunto formado por todos los elementos de B que sean imágenes de algún elemento de A se lo denomina "recorrido" o "rango" o "conjunto de las imágenes", y se simboliza Im (…..)colocando dentro del paréntesis la letra con que nombramos a la ley. Así, si la ley la simbolizamos con f , resulta: Im (f) o B_f.

Ejemplo Nº1:

Sea $A = \{0;1;2;.....;10\}$; $B = N_0$ $g : A \to B / g(x) = 2x$. Completa:

a) Dom (g) = ...

b) $g(2)$ = ... $g(10)$ = ... $g(3)$ = ...

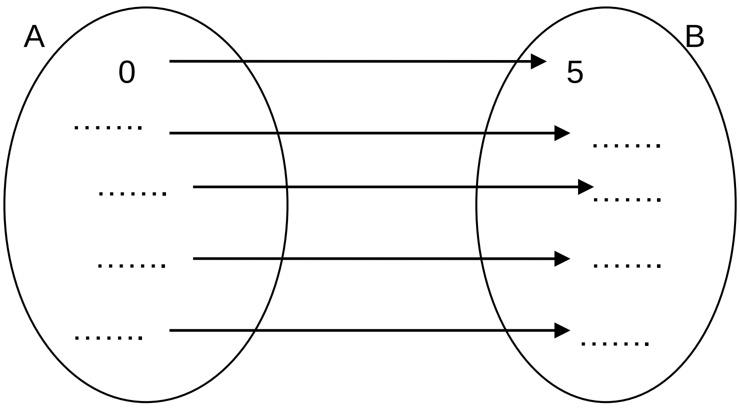
c) $g(x) = 8 \Rightarrow x =$ ....

d) $Im(g) = B_g$ = ...

e) ¿Es B_g = B ? .... ¿Por qué? ....

Ejemplo Nº2:

Dados $A = \{x \,/\, x \in N_0 \wedge x < 5\}$; $B = \{dígitos\}$ y $h : A \to B / h(x) = x + 5$
Completa el siguiente diagrama sagitario:



La correspondencia que se observa en este diagrama también se puede presentar en una tabla, llamada **“Tabla de valores”** que a continuación completarás:

x	h(x)
0	
2	
	8

PROBLEMAS

1) En la tabla se muestra una función $f / f : N \to N_0$

x	y=f(x)
1	0
2	1
3	2
. . .	. . .

a) Descubre la ley de f, exprésala coloquial y simbólicamente.

b) Completa la tabla con algunos valores.

c) ¿Cuál es la imagen de 2?

d) ¿Cuánto es f(1)?

e) Si f(x)=97, ¿cuál es el valor de x?

f) Confecciona el diagrama sagitario.

g) ¿Puedes encontrar el valor de x tal que f(x) = 2,3? ¿Por qué?

2) Dados: $A = N \wedge B = Q_0^+$ y $g : A \to B / g(x) = x : 2$

a) Escribe el menor elemento del conjunto imagen.

b) ¿Puedes encontrar el mayor elemento de dicho conjunto? ¿Por qué?

c) Calcula $g(10) + g(5) - g(1).g(4)$.

d) Completa: $g(.......) = 20{,}5$

e) Confecciona una tabla de valores con los seis primeros elementos del dominio.

3) Sea la función $f: N_0 \rightarrow N / f(x) = x + 2$.

a) Completa la tabla de acuerdo a los valores indicados de las variables

x	f(x)
	5
10	
	101
234	
	a

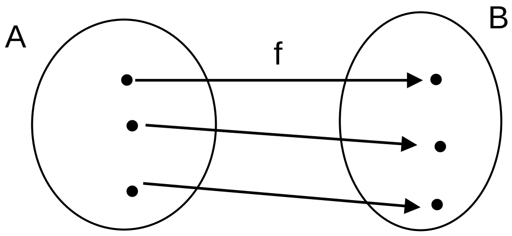
b) Representa en un sistema de coordenadas los siguientes puntos: a(2; f(2)); b(10; f(10)) y c(0; f(0))

Al conjunto de todos los puntos del plano determinados por los pares (x ;y) ,donde y = f(x) lo llamamos gráfico de la función

FUNCIÓN BIYECTIVA.

Definición

Una función es biyectiva si cada elemento del conjunto de llegada es imagen de un único elemento del dominio.



Simbólicamente

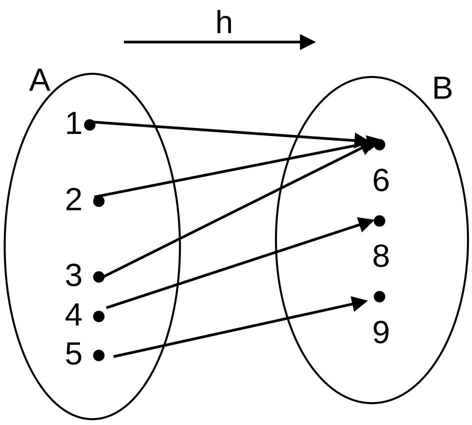
$$\forall y \in B \ \exists! \ x \in A \ / \ f(x) = y$$

$\exists!$ significa "existe y es único"

- Te proponemos analizar la biyectividad de las funciones de los problemas anteriores.

PROBLEMAS

4) Observa el siguiente diagrama:



I) Completa :

a) h (1) = ... h (2) = ... h(4) = ...

b) $\left[h(3)\right]^2 - \dfrac{h(4)+h(1)}{2} + \dfrac{1}{3}$ h(5)=.......

c) h (....) = 8

d) h (b) = 9 $\Rightarrow$ b =……..

e) Dom (h) = ………………

f) Im (h) =………………….

II) Responde

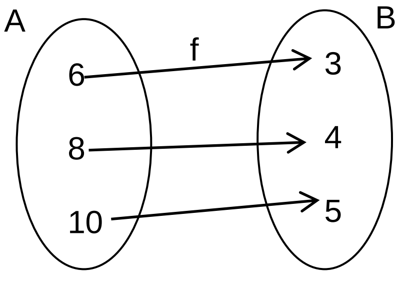
¿h es una función biyectiva? ¿por qué?

5) Si f : A $\rightarrow$ B , completa:

a) Dom (f) = ... Im (f) = ...

b) f : A $\rightarrow$B / f (x) = ...

¿Esta función es biyectiva? ¿por qué?



6) Dados:

$$A = \{1;2;3;4;5;6\} \ ; \ B = N_0 \ \text{y} \ f: A \to B / f(x) = x!$$

Si $x \in N \wedge x \geq 2$ se define $x!$ y se lee "factorial de x", al número que representa el producto de los factores de los números naturales consecutivos a partir de 1 y hasta x, es decir:

$$x! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times x$$

Además se conviene que : $1! = 1 \quad y \quad 0! = 1$

a) Completa la siguiente tabla:

x	f(x)
1	$1! = 1$
2	.... $= 1 \times 2 =$ ....
3	.... = ... = ...
4	.... = ... = ...
5	.... = ... = ...
6	.... = ... = ...

b) Responde: ¿es $f(x)$ biyectiva? ¿Por qué?

7) Dados: A = N; B=N_0 y f(x) es tal que a cada elemento de A le corresponde la última cifra de $x!$, completa y responde:

x	x!	f(x)
1	………..	………..
2	………..	………..
3	………..	………..
4	………..	………..
5	………..	………..
6	………..	………..
7	………..	………..

¿Es f(x) una función biyectiva? ¿Por qué?

8) Dadas las funciones:

$$f : N_0 \rightarrow N \quad / \; f(x) = 2x+3$$

$$g : N \rightarrow \{\text{números racionales no negativos}\} / \; g(x) = \frac{1}{3}x$$

I) Completa:

a) $f(5) = ...$

b) $f(b) = 20013 \Rightarrow b = ...$

c) $f(f(2)) = f(........) = ...$

d) $f(a+2) = ...$

e) $[g(6)]^3 = ...$

f) $g(17) + g(5) - g(1) = ...$

g) $g(r) = 33 \Rightarrow r = ...$

h) $g(s) = 45 \Rightarrow s = ...$

i) $g(g(18)) = ...$

j) $g(3a) = ...$

k) $f(2) \,.\, g(2) - [g(1)]^3 = ...$

l) $f(g(120)) = f(....) = ...$

m) $g(f(17)) = g(......) = ...$

n) $f(g(3000)) = ...$

II) Responde: a) ¿ Es f una función biyectiva?.Justifica

b) ¿ Es g(1500) < f(1234)?

9) Se define $f : A \rightarrow B / f(x) = 2x+1$ siendo $A = \{x / x \in N_0 \wedge x < 5\}$; $B = N$:

a) Representa en un sistema de coordenadas todos los pares $(x ; f(x)); x \in A ; f(x) \in B$.

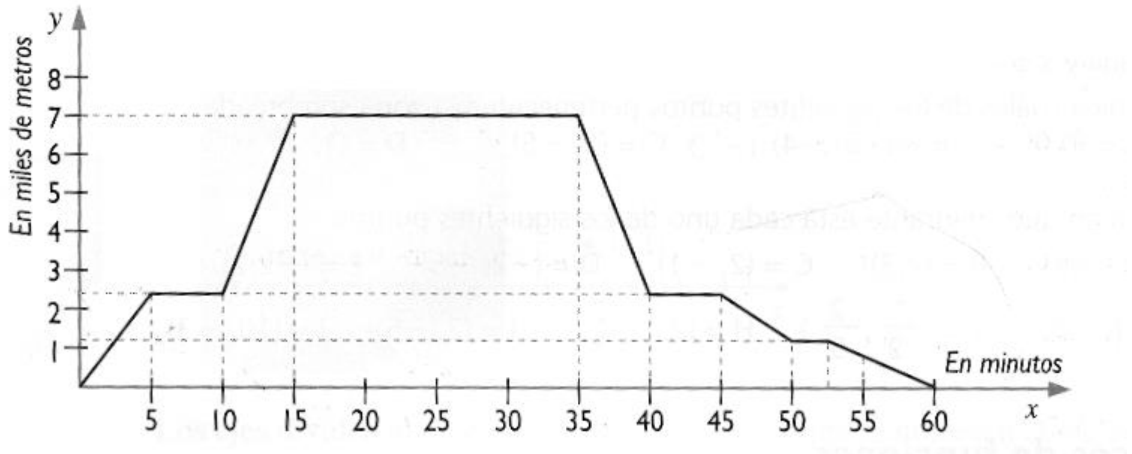
b) ¿Es f una función biyectiva?

c) ¿Es Im(f) igual a B? ¿Por qué?

10) Sea $f: A \to B / f(x) = \frac{x}{5} + 1$, siendo $A = \{5; 10; 15; 20; 25\}$ y $B = N_0$:

a) Realiza un diagrama sagitario.
b) ¿Cuál es el recorrido o conjunto imagen de la función?
c) ¿Es f una función biyectiva? Justifica tu respuesta.
d) Si $g: N_0 \to N / g(x) = x!$, obtiene: $g[f(5)] + g(3)$.

11) El siguiente es el gráfico de una función que representa la altura de un avión en vuelo, en función del tiempo transcurrido desde su partida:



Analiza el gráfico y responde en las líneas punteadas:

a) ¿Cuánto tiempo duró el vuelo?
b) ¿Durante cuánto tiempo mantuvo el avión su altura de crucero?
c) ¿A qué altura estaba el avión a los 10 minutos de iniciar el vuelo?
d) ¿A cuántos minutos de iniciar el vuelo alcanzó los 5000 metros de altura?
e) ¿Cuánto tiempo duró el descenso para el aterrizaje?
f) Si el avión partió a las 13 horas, ¿a qué hora llegó a destino?
g) ¿A qué hora inició el descenso?

12) La relación $p(x) = 3x$ permite calcular el perímetro de un triángulo equilátero conociendo la longitud x de sus lados. Suponé que tanto el lado como el perímetro se miden en cm.

a) Realiza una tabla con cinco valores del perímetro de un triángulo equilátero en función de los valores del lado.
b) Representa en un sistema de coordenadas los valores de tu tabla.

.

13) Sea $f : A \to B \ / \ f(x) = \sqrt{x}$ siendo $A = \left\{ 0 \ ; \ \frac{1}{4} \ ; 1 \ ; \ 25 \ ; \ 121 \right\}$. Determina B para que f(x) no sea biyectiva. Escribe además B_f.

BIBLIOGRAFIA:

- Apunte IPS - Funciones - Capítulo I - 1º año - Código 1195 - Cattaneo, Liliana
- Matemática 1; 2 y 3 - Guzman ; Cólera y Salvador - Grupo Anaya - 1991
- Matemática 8º - Editorial Kapelusz - Julia Seveso de Larotonda ; Ana R Wykonski y Graciela Ferrarini - Año 1997