Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de R

Sistemas de Ecuaciones

4º AÑO

Cod. 1401-15

Betina Cattáneo
Mónica Napolitano

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

SISTEMAS DE ECUACIONES

Trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales, que poseen cualquier cantidad de ecuaciones y de incógnitas.

Si indicamos con m la cantidad de ecuaciones y con n la cantidad de incógnitas, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, los llamamos m x n.

$$\text{Así} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & E_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & E_m \end{cases}$$

- Los a_{ij} (números reales dados) se denominan coeficientes y los b_i (números reales dados) términos independientes.
- Los símbolos $x_1;x_2;\dots;x_n$ representan las incógnitas del sistema.

Observaciones:

- Un sistema m x n se llama homogéneo si todos sus términos independientes son nulos, en caso contrario los llamamos no homogéneos. Toso sistema homogéneo con n incógnitas, tiene al menos, la solución $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, llamado solución trivial o nula.
- Un sistema es compatible si tiene alguna solución, de lo contrario si carece de soluciones, es incompatible.
- Un sistema compatible puede tener una única solución, en cuyo caso se denomina determinado o infinitas soluciones; en este caso se llama indeterminado.

Clasificación de los sistemas según su solución

SISTEMA → COMPATIBLE (tiene solución) → DETERMINADO (tiene única solución)

SISTEMA → COMPATIBLE (tiene solución) → INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones)

SISTEMA → INCOMPATIBLE (no tiene solución)

A continuación trataremos de encontrar una estrategia que nos permita resolver un sistema m x n. Es decir, hallar el conjunto de todas sus soluciones.

<u>Resolución de un sistema m x n:</u>

Primeramente precisaremos algunos conceptos:

- *<u>Sistemas escalonados:</u> son aquellos en los cuales cada ecuación, a partir de la segunda, empieza, por lo menos, con un coeficiente nulo más que la anterior.*
- *<u>Sistemas equivalentes:</u> son aquellos que tienen el mismo conjunto solución.*

Método de Gauss o Método de eliminación de incógnitas

El Método de Gauss es un procedimiento mediante el cual se pasa de un sistema no escalonado a otro escalonado equivalente.

Para ello, nos basaremos en los criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones (se detallan más abajo) y consiste, si tenemos un sistema m x n, en ir eliminando la primera incógnita de m - 1 ecuaciones, la segunda incógnita de m - 2 ecuaciones (son m – 2 ecuaciones de las m – 1 ecuaciones en las cuales se eliminó la primera incógnita), y así sucesivamente hasta lograr llegar a un sistema escalonado equivalente.

Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones

(1) Si a **ambos miembros** de una ecuación de un sistema **se les suma una misma expresión**, el **sistema** obtenido resulta **equivalente al original**.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 7 \\ 4x + 2y - z = -5 \\ x - y + 3z = 8 \end{cases}$, es equivalente a $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 7 \\ 4x + 2y - z = -5 \\ x - y + 3z + (-3)z = 8 + (-3)z \end{cases}$

(2) Si **multiplicamos ambos miembros** de una ecuación de un sistema **por un número distinto de cero**, el **sistema** obtenido resulta **equivalente al original**.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 7 \\ 4x + 2y - z = -5 \\ x - y + 3z = 8 \end{cases}$, es equivalente a $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 7 \\ 8x + 4y - 2z = -10 \\ x - y + 3z = 8 \end{cases}$

(3) Si **sumamos** a una ecuación de un sistema otra ecuación **del mismo sistema**, el **sistema** obtenido resulta **equivalente al original**.

Ejemplo: El sistema $\begin{cases} 2x-5y+4z=7 \\ 4x+2y-z=-5 \\ x-y+3z=8 \end{cases}$, es equivalente a $\begin{cases} 2x-5y+4z=7 \\ (4x+4y-z)+(2x-5y+4z)=-10+7 \\ x-y+3z=8 \end{cases}$

(4) Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar **las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas por números no nulos,** el **sistema** obtenido resulta **equivalente al original**.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 2x-5y+4z=7 \\ 4x+2y-z=-5 \\ x-y+3z=8 \end{cases}$, es equivalente a $\begin{cases} 2x-5y+4z=7 \\ 4x+4y-z=-10 \\ 2\cdot(x-y+3z)+(-1)\cdot(2x-5y+4z)=2\cdot 8+(-1)\cdot 7 \end{cases}$

(5) Si en un sistema s**e cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas**, el **sistema** obtenido resulta **equivalente al original**.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 2x-5y+4z=7 \\ 4x+2y-z=-5 \\ x-y+3z=8 \end{cases}$, es equivalente a $\begin{cases} 2x-5y+4z=7 \\ x-y+3z=8 \\ 4x+2y-z=-5 \end{cases}$

En el siguiente ejemplo, mostraremos una manera para llevar el procedimiento de Gauss, basándonos en los criterios mencionados.

Resuelve el siguiente sistema $(S)\begin{cases} 2x+y+3z=1 & \leftarrow \quad E_1 \\ 3x-y+z=4 & \leftarrow \quad E_2 \\ x+2y-z=-1 & \leftarrow \quad E_3 \end{cases}$

1º paso: para eliminar "x" de E_2 y de E_3, realizaremos las siguientes operaciones:

$$2E_2 + (-3)E_1 \leftarrow E_2^{'}$$

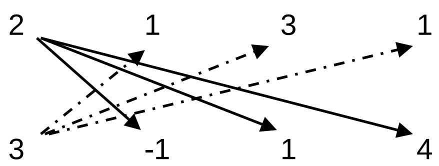
$$2E_3 + (-1)E_1 \leftarrow E_3^{'}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{array}{ccccccccc}
2E_2 & \rightarrow & 2.3x & + & 2.(-1)y & + & 2.1z & = & 2.4 \\
(-3)E_1 & \rightarrow & (-3).2x & + & (-3).1y & + & (-3)3z & = & (-3).1 \\
\hline
E_2^{'} & \rightarrow & (2.3-3.2)x & + & [2.(-1)-3.1]y & + & (2.1-3.3)z & = & 2.4-3.1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0x & + & (-5)y & + & (-7)z & = & 5
\end{array}$$

Las fórmulas que nos dan los coeficientes (-5); (-7) y el término independiente 5 de la $E_2^{'}$ pueden recordarse fácilmente aplicando el siguiente esquema:

Algoritmo de Gauss



Diferencias de productos cruzados entre el producto de los factores conectados por las flechas en trazo continuo (minuendo) y el producto de los factores conectados por las flechas en trazo discontinuo (sustraendo).

Es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1) - 3.1$$

El mismo esquema se repite para anular el coeficiente de x en E_3 y obtener $E_3^{'}$. Así resulta:

$$(S^{'})\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \rightarrow E_1 \\ \quad - 5y - 7z = 5 \rightarrow E_2^{'} \\ \quad\ \ 3y - 5z = -3 \rightarrow E_3^{'} \end{cases}$$

2º paso: para eliminar "y" de $E_3^{'}$, realizaremos la siguiente operación:

$$(-3)E_2^{'} + (-5)E_3^{'} \leftarrow E_3^{''}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{array}{ccccccc}
(-3)E_2^{'} & \rightarrow & (-3).(-5)y & + & (-3).(-7)z & = & (-3).5 \\
(-5)E_3^{'} & \rightarrow & (-5).3y & + & (-5).(-5)z & = & (-5).(-3) \\
\hline
(-3)\,E_2^{'} + (-5)\,E_3^{'} & \rightarrow & [(-3).(-5)+(-5).3]y & + & [(-3).(-7)+(-5).(-5)]z & = & (-3).5+(-5).(-3) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0y & + & 46z & = & 0
\end{array}$$

En este paso se aplica el algoritmo de Gauss para facilitar el procedimiento. Luego resulta el siguiente sistema escalonado equivalente al inicial, cuya solución es rápida de obtener:

$$(S'')\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \rightarrow E_1 \\ -5y - 7z = 5 \rightarrow E_2' \\ 46z = 0 \rightarrow E_3'' \end{cases}$$

Resolviendo el sistema S'' resulta: $z = 0$; $y = -1$; $x = 1$; luego el conjunto solución $\{(1;-1;0)\}$

Teniendo en cuenta la solución del sistema podemos concluir que el sistema es compatible determinado y que los tres planos se intersecan en el punto $(1;-1;0)$

La representación final, utilizando el algoritmo de Gauss, resulta:

x	y	z	ti
2	1	3	1
3	-1	1	4
1	2	-1	-1
	-5	-7	5
	3	-5	-3
		46	0

Entonces:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ -5y - 7z = 5 \\ 46z = 0 \end{cases}$$

Resulta: $S = \{(1;-1;0)\}$

Práctica

1. Sin efectuar cálculos, indica una solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - t = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -2x+y+2z=2 \\ 3x-2y-z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-y+z=1 \\ x+2y-2z=-1 \\ 2x-3y+z=-1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2a-5b+4c=-1 \\ 4a-5b+4c=3 \\ 5a-3c=13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+6y-5z=-4 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-6y+5z=0 \\ 6x-9y+10z=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ -2x-y+5z=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y+5z=0 \\ x+y+4z=0 \end{cases}$

3. Dado el sistema $\begin{cases} ax-y=1 \\ x-ay=2a-1 \end{cases}$, determina el valor de “a” para que:
   i. sea incompatible
   ii. sea compatible indeterminado
   iii. tenga una solución en la que $x=3$

4. Demuestra que el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=b_1 \\ 2x+5y+3z=b_2 \\ x+8z=b_3 \end{cases}$ es compatible determinado cualquiera sean b_1; b_2 y b_3.

5. Halla tres números sabiendo que, el primero es igual a dos veces el segundo mas la mitad del tercero; que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero el resultado es 5.

6. En cierto comercio, un cliente compra 5 kg de papas, 3 kg de azúcar y 2 kg de café, gastando un total de $37,50. Otro cliente compra 2 kg de papas, 2 kg de azúcar y 1 kg de café, gastando $19. Un tercer cliente compra 4 kg de azúcar y 5 kg de café gastando $52. halla el precio de cada artículo.

7. Tres amigos se pesan en una báscula de 2 a 2. Antonio y Benito suman 110 kg, Antonio y Carlos 120 kg, mientras que Benito y Carlos pesan 130 kg. ¿Cuántos pesa cada uno?

8. Los 90 alumnos de 3º año de un colegio están divididos en 3 grupos: A, B y C. Calcula el número de alumnos de cada grupo sabiendo que si se pasan 7 alumnos del grupo B al grupo A, ambos grupos tendrían el mismo número de alumnos o que si se pasan 4 alumnos del grupo C al grupo A, en el grupo A habría la mitad de alumnos que en el grupo C.

9. La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas, es igual a la suma de las decenas más el doble de las unidades. Si se permutan entre si las cifras de las centenas y la de las unidades, el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número.

10. Determine los valores de los coeficientes a, b y c tales que los puntos $(1;-1)$, $(-1;-5)$ y $(3;11)$ pertenezcan a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$

11. Una compañía de bicicletas produce tres modelos de bicicletas: Dakar, Komodo y Córdoba. La fabricación de cada bicicleta consta de tres etapas: soldadura, pintura y ensamblaje. El tiempo que se dedica a cada etapa de fabricación se indica en la siguiente tabla. Durante una semana específica, la compañía dispone de un máximo de 133 horas para soldadura, 78 horas para pintura y 96 horas para ensamblaje. Determine cuántas bicicletas de cada tipo deben producirse esa semana para que la compañía opere a su máxima capacidad.

Etapa	**Dakar**	**Komodo**	**Córdoba**
Soldadura	2	3	4
Pintura	1	2	2,5
Ensamblaje	1,5	2	3

Respuestas

1. $(0;0;0;0)$
2.
   a) $\{(1;-2;3)\}$
   b) $\left\{\left(\frac{1}{7};\frac{13}{14};\frac{3}{2}\right)\right\}$
   c) $\left\{\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};2\right)\right\}$
   d) $\left\{\left(\frac{3}{2}\alpha;\alpha;0\right);\ \alpha \in R\right\}$
   e) $\{\ \}$
   f) $\{(1;-2;3)\}$
   g) $\left\{\left(-2;\frac{1}{5};-1\right)\right\}$
   h) $\{(-2-2\lambda;3+\lambda;\lambda);\ \lambda \in R\}$
   i) $\{\ \}$
   j) $\{(-3\alpha;-\alpha;\alpha);\ \alpha \in R\}$

3.

i. $a = -1$ ii. $a = 1$ iii. $a = -\frac{4}{3} \vee a = 1$

5. $\frac{5}{2}; \frac{1}{2}$ y 3

6. 1 kg de papas $\rightarrow$ \$2,5
1 kg de azúcar $\rightarrow$ \$3
1 kg de café $\rightarrow$ \$8

7. Antonio $\rightarrow$ 50 kg
Benito $\rightarrow$ 60 kg
Carlos $\rightarrow$ 70 kg

8. A $\rightarrow$ 16 alumnos
B $\rightarrow$ 30 alumnos
C $\rightarrow$ 44 alumnos

9. 421

10. $a = 1$, $b = 2$ y $c = -4$

11. Se podrán producir 28 Dakar, 15 Komodo y 8 Córdoba.