Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Números Complejos

5º AÑO

Cod. 1502-14

Matemática

Prof. Verónica Filotti
Prof. Mirta Rosito
Resolución de Problemas: Prof. Juan Carlos Bue

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

Los Números Complejos.

Una ampliación más en el campo numérico

La necesidad de crear nuevos conjuntos numéricos (enteros, racionales, irracionales), fue surgiendo a medida que se presentaban situaciones que no tenían solución dentro de los conjuntos numéricos ya conocidos.

Problema

1) Resuelve las siguientes ecuaciones, indicando a qué conjunto numérico pertenecen sus soluciones N(naturales) : Z(enteros) : Q(racionales) ; I(irracionales) .

a) $3x+5=11$ b) $\frac{1}{x}=\frac{-3}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{5}-x=\frac{6}{5}$

d) $\sqrt{3}+x=1$ e) $x^2=\frac{25}{4}$ f) $\frac{x-\frac{1}{7}}{-2}=\frac{1}{3}$

Un desafío:

Encuentra los valores de "x" que hacen cierta la ecuación:

$$x^2 + 1=0.$$

¿Es posible encontrar en los conjuntos numéricos que conoces algún número "x" que verifique la ecuación? ¿Por qué?

En el siglo XVIII, el matemático Euler introdujo el símbolo **i** (inicial de la palabra latina imaginarius) para nombrar un número cuyo cuadrado es igual a
-1

Se define entonces el número i, al que llamamos ***unidad imaginaria***, como aquel cuyo cuadrado es (-1).

Es decir: $\boxed{i^2 = -1}$

Luego las soluciones de la ecuación $x^2 = -1$ son:

$x = i$ pues $i^2 = -1$ o **$x = -i$** pues $(-i)^2 = (-i).(-i) = -1$

Más desafíos

Resolvamos la siguiente ecuación :

$$x^2 + c = 0$$

$$x^2 = -c$$

- ✓ Si $c \leq 0$ $\quad x = \pm\sqrt{-c}$
- ✓ Si $c>0$ $\quad x^2 = -\left(\sqrt{c}\right)^2$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 = -1$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right) = \pm i \qquad \text{Luego} \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{c}\, i$$

Problema

2) Determina las soluciones de :

a) $x^2 + 25 = 0$
b) $x^2 + 5 = 4x$

Una ampliación más del campo numérico: ***Los números complejos***

Llamamos números complejos a los números de la forma **a + bi** donde **a** y **b** son números reales e **i** la ***unidad imaginaria.***

Si Z es un número complejo resulta: $Z = a + bi$

es la componente real Re(Z) — es la componente imaginaria Im(Z)

Definimos al conjunto de los números complejos:

$$C = \{Z \,/\, Z = a + bi \,,\, a \in R \,;\, b \in R \,;\, i^2=-1\}$$

Un complejo expresado de la forma Z = a + bi se la conoce con el nombre de ***forma binómica*** del complejo Z

Por ejemplo, el número complejo: Z = -3 + 0,4i tiene Re(Z)=-3 e Im(Z)=0,4

Problema

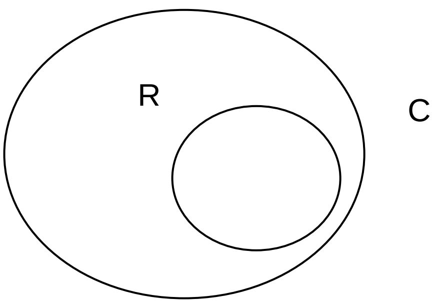
3) Completa el siguiente cuadro

Z_i	Forma binómica del Z_i	$Re(Z_i)$	$Im(Z_i)$
Z_1	$5-\frac{1}{2}i$		
Z_2		-1	π
Z_3		0	$\frac{3}{4}$
Z_4		11	0

Observaciones

- Si Z=a+bi y a=0 Z= bi recibe el nombre de ***imaginario puro***

- Si Z=a+bi y b=0 Z=a . En este caso el número complejo, cuya componente imaginaria es nula es **un número real.** Notemos entonces que el conjunto de los números reales es un subconjunto del de los números complejos



- Dos números complejos son ***iguales*** si son respectivamente iguales sus componentes reales e imaginarias

$$a+bi=c+di \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

Problema

4) Determina x e y pertenecientes al conjunto de los números reales de modo que $Z_1=Z_2$

siendo $Z_1=x+y-(2x+y)i \qquad Z_2=-x+(1+y)i+3$

Operaciones con números complejos.Propiedades

Propuesta de trabajo: Resuelve la adición y multiplicación de los siguientes números complejos teniendo en cuenta que se expresan como binomios y tú ya sabes operar con ellos .

Dados $Z=a+bi \qquad W=c+di$

Adición

$Z+W=(a+bi)+(c+di)=$…………

Multiplicación

$Z.W=(a+bi).(c+di)=$…………..

¡Recuerda !
$\boldsymbol{i^2=-1}$

Propiedades

Adición		*Multiplicación*
	$Z \in C; W \in C; V \in C$	
Z+W=W+Z	*Conmutativa*	$Z \cdot W = W \cdot Z$
$(Z+W)+V = Z+(W+V)$	*Asociativa*	$(Z \cdot W) \cdot V = Z \cdot (W \cdot V)$
$\forall Z \in C; \exists 0 \in C / Z+0=Z$	*Existencia de elemento neutro*	$\forall Z \in C; \exists 1 \in C / Z.1=Z$
$\forall Z \in C; \exists (-Z) \in C / Z+(-Z)=0$ *-Z se denomina* **opuesto** *de z*	*Existencia de elemento inverso*	$\forall Z \neq 0 \in C; \exists Z^{-1} \in C / Z.Z^{-1}=1$ Z^{-1} *se denomina* **recíproco** *de z*

Distributiva del producto con respecto a la adición

$(Z+W) \cdot V = Z \cdot V + W \cdot V$

Resta de números complejos

Dados Z=a+bi , W=c+di definimos :

$$Z - W = Z + (-W) = (a+bi)+(-c-di)$$

Conjugado de un número complejo

Si Z = a + bi , llamamos conjugado de Z y lo notamos $\overline{Z}$ al complejo $\overline{Z}$ = a – bi

Propiedades

Sean Z=a+bi y W=c+di

- $\overline{\overline{Z}} = Z$
- $Z + \overline{Z} = 2a$
- $Z - \overline{Z} = 2bi$
- $Z \,.\, \overline{Z} = a^2 + b^2$ (.Número real que recibe el nombre de ***norma*** del complejo Z)
- $\overline{Z \pm W} = \overline{Z} \pm \overline{W}$
- $\overline{Z \,.\, W} = \overline{Z} \,.\, \overline{W}$

Problemas

5) Demuestra las propiedades del conjugado de un número complejo

6) Dados los complejos: $Z_1 = 2 + 3i$; $Z_2 = -2 - \frac{1}{2}i$; $Z_3 = -9$

Calcula: a) $Z_1 + Z_2 =$ b) $Z_1 . Z_2 =$ c) $\overline{Z_1} + Z_2 \,.\, Z_3 =$

d) $Z_1^2 - Z_2 =$ e) $\left(-Z_1 + \overline{Z_3}\right).\left(-Z_2\right) =$ f) $Z_2 - \sqrt{Z_3}\left(\frac{1}{2} - Z_1\right) =$

***Nota**: en operaciones combinadas con números complejos al resolver $\sqrt{a}$ con a<0 considera sólo la solución positiva*

Para pensar

Dados Z=a+bi W= c+di

*¿Cómo resolver el **cociente de números complejos**?*

En símbolos :

$$\frac{Z}{W} = \frac{a+bi}{c+di} = ?$$

Te proponemos completar el siguiente procedimiento , teniendo en cuenta que el producto de un complejo por su conjugado (norma de un complejo) es un número real :

$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} \,.\, \underbrace{\frac{\overline{W}}{\overline{W}}}_{\text{artificio}} = \frac{\text{.......... ......}}{\text{.......... ....}} \,.\, \frac{\text{.......... ....}}{\text{.......... ....}} = \frac{\qquad\qquad\qquad}{} =$$

Ejemplo:

$$\frac{1-3i}{2+2i} = \frac{1-3i}{2+2i} . \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{(1-3i).(2-2i)}{(2+2i).(2-2i)} = \frac{\text{.....................................}}{\text{....................}} = \frac{\text{..........................}}{\text{.............}} =$$

....

Problema

7) Resuelve las siguientes ecuaciones :

a) $\frac{2i}{x} = 3 - i$

b) $1 + \frac{i}{1+i} = \sqrt{-16}.x$

c) $\frac{-i}{\frac{1}{2} - x} = (1+i)^2$

d) 5 – (-3 +2i) = $\frac{x}{4i}$

La unidad imaginaria y un producto que genera un ciclo

$i^0 = 1$ (por definición)

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$

$i^4 = ...$

$i^5 = ...$

$i^6 = ...$

$i^7 = ...$

……………………………………

……………………………………..

……………………………………..

$i^n = ?$ n$\in N_0$

Para resolver este problema recordemos que por aplicación del algoritmo de una división entera resulta:

$$i^n = i^{4c+r} \overset{(1)}{=} i^{4c} i^r \overset{(2)}{=} \left(i^4\right)^c . i^r \overset{(3)}{=} 1^c . i^r = i^r$$

(1) producto de potencias de igual base
(2)potencia de otra potencia
(3)potencia de la unidad imaginaria

Luego:

$i^n = i^r$ con $0 < r < 4 \wedge r \in N_0$

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \hline r & c \end{array}$$

$0 < r < 4 \wedge r \in N_0$

n=4c+r

De donde
Si llamamos P al conjunto de todas las potencias de i es :

P=$\{1; i; -1; -i\}$

Problemas

8) Calcula: a) $i^{431} =$ b) $i^{1224} =$ c) $i^{779} =$

9) Determina:

a) el conjugado de X / $i^{421} + \dfrac{1}{2X} = i.\sqrt{-25}$

b) (-W) si W + (i – 2) $^{-3}$ + i^{1231} = 0

c) X si $\dfrac{3 - i}{X} = i^{421}$

10) El producto entre un complejo y su conjugado es 80. Si la componente real es 4. ¿Cuál es la otra componente?

11) La suma de dos complejos conjugados es 10 y el producto es 34. ¿Cuáles son los complejos?

12) Calcula: $\dfrac{1}{i}; \dfrac{1}{i^2}; i^{-9}$

13) Determina el valor de x real para que el producto:

$$(2 - 5i).(3 + xi)$$

a) sea imaginario puro
b) sea un número real

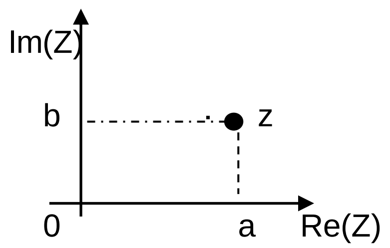
14) Escribe un número complejo tal que:

i) su parte real sea el doble de su parte imaginaria
ii) su parte real sea la cuarta parte que su parte imaginaria
iii) sea un imaginario puro y su parte imaginaria sea un número irracional comprendido entre 5 y 6

Representación gráfica de los números complejos.

Vimos que la recta quedó completa con los números reales, entonces, para representar números complejos, deberemos recurrir al plano.

El número complejo Z=a + bi se representa en el plano mediante el punto de coordenadas (a; b). El eje de las abscisas se llama eje real y el de las ordenadas, eje imaginario. De esta forma, a cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.



Problema

15) Representa los siguientes números complejos:

$Z_1 = 3 + 2i$ $\qquad$ $Z_2 = -2 + 4i$ $\qquad$ $Z_3 = \frac{1}{2} - i$

$Z_4 = -3i$ $\qquad$ $Z_5 = -3 - 2i$ $\qquad$ $Z_6 = 3$

<u>Observación</u>: cada punto del plano P (a; b) determina un vector posición $\overrightarrow{OP} = (a;b)$,a partir de allí establecemos que a cada complejo de la forma a + bi le corresponde un vector posición de extremo P.Entonces, llamamos módulo de un complejo al módulo del vector que lo representa

Problema

16) Siendo: W = 2 – i

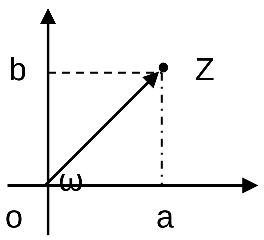
a) Calcula su módulo . ¿Qué relación vincula al módulo de un complejo con su norma?

b) Representa en el plano complejo W ; (-W) ; $\overline{W}$;2W

<u>Argumento de un complejo</u>: se llama argumento del complejo Z a la medida del ángulo ω, formado por el semieje positivo de las abscisas y la semirrecta de origen o que contiene al punto que representa el complejo.

En símbolos

arg(z) = ω



Como ω puede tomar infinitos valores, consideraremos como ***argumento principal*** a aquel que verifique 0 $\leq$ ω < 360º

Para determinar el argumento de z = a + bi, debe tenerse en cuenta que

Si a $\neq$ 0; tg ω = $\frac{b}{a}$

Si $a = 0$; $\begin{cases} b > 0 \Rightarrow \omega = \dfrac{\pi}{2} \\ b < 0 \Rightarrow \omega = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

<u>Problema</u>

17) Determina el argumento principal de los siguientes complejos:

Z = 1 + i $\qquad$ W = -1,5 $\qquad$ V = 0,5 – 3i

Forma polar de un número complejo

Si Z = a + bi = $|Z|_{\omega}$ 0º $\leq$ ω < 360º

Forma polar del complejo Z

Problema

18) Escribe en forma polar los complejos del problema anterior

Forma trigonométrica de un complejo

Sabiendo que: senω = $\frac{b}{|z|}$ $\Rightarrow$ b = |z| . senω

cos ω= $\frac{a}{|z|}$ $\Rightarrow$ a = |z|. cosω

resulta que: Z = a + bi = | Z |.cos ω+ | Z |. senω i = | Z |.(cosω+i.senω)

Esta última expresión se conviene en escribir, por razones de simplicidad:

| Z | cisω

Resumiendo

Tres formas de expresar a un número complejo Z

$$Z = \underbrace{a+bi}_{\text{formabinómica}} = \underbrace{|Z|_{\omega}}_{\text{formapolar}} = \underbrace{|Z|(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega)}_{\text{forma trigonomética}} = \overbrace{|Z|\operatorname{cis}\omega}$$

El producto y el cociente de números complejos en forma trigonométrica y en polar

Desafío:

Demuestra que dados $z_1 = \rho_{1_{\omega_1}}$ y $z_2 = \rho_{2_{\omega_2}}$ resulta:

a) $(\rho_{1\omega 1})(\rho_{2_{\omega_2}}) = (\rho_1.\rho_2)_{(\omega_1+\omega_2)} = \rho_1\rho_2 cis(\omega_1 + \omega_2)$

b) $(\rho_{1_{\omega_1}})^n = {\rho_1}^n{}_{n\omega_1} = {\rho_1}^n cis(n_{\omega_1})$

c) $\frac{\rho_{1_{\omega_1}}}{\rho_{2_{\omega_2}}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}{}_{\omega_1-\omega_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} cis(\omega_1 - \omega_2) \quad con\ \rho_{2_{\omega_2}} \neq 0$

Problemas

19) Expresa en forma polar y trigonométrica:

a) el opuesto de (–1 – i)

b) el conjugado de (2 – i)

20) Expresa en forma binómica los complejos

a) $3_{\frac{1}{7}\pi}$ b) $1_{\frac{1}{6}\pi}$

21) Dados los complejos: Z = 1 – 3i W = $5_{\frac{1}{2}\pi}$ V = 3 cis 180º

Expresa previamente en forma binómica y luego, calcula:

- Z . W – V (escribe el resultado en forma polar)
- W : V
- W – Z + 2V (escribe el resultado en forma trigonométrica)

22) Dado el complejo: Z = $2_{\frac{1}{3}\pi}$

Escribe el conjugado de Z en forma binómica y representa gráficamente el opuesto de Z

23) Describe dónde se localizan en el plano complejo todos los números que poseen:

a) parte real igual a 1 b) parte imaginaria igual a 1

c) módulo igual a 3 d) argumento igual a 180º

Y más problemas!!!!

24) Determina los números complejos z, que verifican las siguientes condiciones:

a) $\left(z+\frac{1}{z}\right) \in R$

b) $z+\bar{z}.\mathrm{Im}[z]=1$

c) $z - z.\mathrm{Re}[z]=-i$

d) $z.\mathrm{Re}[z]=z.\mathrm{Im}[z]$

e) $\frac{\mathrm{Im}[z]}{z}=\sqrt{z.\bar{z}}$

25) Representa gráficamente los números complejos z tal que: $z-\bar{z}=i$.

26) Si A = $\left\{ z \in C / \operatorname{Re}[z] \leq 1 \wedge 0 < \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$, decide si los siguientes complejos pertenecen a A. Justifica tu respuesta:

a) z = 1 + i
b) v = 0,5
c) w = 0,5i

27) Contesta Verdadero o Falso. Justifica tu respuesta.

a) ningún número complejo es igual a su conjugado
b) ningún número complejo es igual a su opuesto
c) los complejos: z = - 6 + 6i y w= $6\sqrt{2}_{315°}$ son opuestos
d) el producto de dos números complejos imaginarios puros es un número complejo imaginario puro.
e) $(-2\sqrt{2}i)$ es solución de la ecuación $x^3 + 8x = 0$

28) Siendo: $z = \frac{3k - ki}{1 - 3i}$, determina k para que $|z| = 10$

29) La suma de dos complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números complejos?

30) Resuelve los siguientes sistemas en los que z y w son números complejos.

a) $\begin{cases} zi + (1+i).w = 2i \\ (1+i).z + (5-i).w = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1+i).z + (3-i).w = 5i \\ z - wi = 2 + 3i \end{cases}$

31) Averigua que número complejo verifica que la suma entre el duplo de dicho número y el cuadrado de su conjugado da por resultado cero.

32) Determina el z + $\frac{1+i}{2-2i} = \sqrt{2}_{45°}$

33) El cociente de dos números complejos es $5_{20°}$y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos.

34) Dados: $z_1 = 2(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)$; $z_2 = -\sqrt{3}i$; $z_3 = 5_{\frac{\pi}{6}\text{rad}}$,Calcula:

a. en forma polar: $z_1.z_2$

b. en forma trigonométrica: $\dfrac{z_1}{z_3}$

c. en forma binómico: $(z_1+z_2).z_3$

d. el argumento de w si $w=\dfrac{\frac{1}{2}z_1+\sqrt{2}}{z_2}$

35) Expresa en forma trigonométrica

a) $z_1 / z_1^{-1} = \dfrac{1}{-2+i}$

b) $-z_2 / z_2 - 1 = 2+i$

36) Representa en el plano complejo:

$$A=\{z / z \in C \wedge |z| = 7\}$$

$$B=\left\{x / x \in C, \arg x = \frac{\pi}{6} \wedge |x| = 5\right\}$$

$$C=\{y / y \in C \wedge 2 \leq |y| < 5\}$$

$$D=\left\{y / y \in C; \frac{\pi}{4} \leq \arg y < \frac{3}{4}\pi \wedge 1 \leq |y| < 4\right\}$$

37) Determina el complejo Z en las siguientes ecuaciones .

a) $\left[3(Z+i)-4\overline{Z}+i\right](2+3i)=47-40i$

b) $Z(2+3i)-\overline{Z}(4+2i)=Z-(5+5i)$

c) $\dfrac{\overline{Z}+(2+3i)^2+Z}{3+3i}=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}i$

38) ¿Se verifica la siguiente igualdad?

$$Z^{-1} = \frac{2\overline{Z}}{Z^2 + \left(\overline{Z}\right)^2 - (Z - \overline{Z})^2}$$

39) Demuestra que :

a) $\left.\begin{array}{l} W = 4_{30^\circ} \\ Q = 3_{60^\circ} \\ Z = 2_{-50^\circ} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(Z^{-1}.\overline{Q}\right)^{-1}.3\overline{Z} = 4_{60^\circ}$

b) $\left.\begin{array}{l} W = 4_{30^\circ} \\ Q = 3_{60^\circ} \\ Z = 2_{-50^\circ} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overline{W} : \left(.\overline{Q} : Z^{-2}\right)^2 : (Q^2.Z^3)^{-1} = 2_{260^\circ}$

40) Determina el ángulo que forman el conjugado de un número complejo con su recíproco.

Bibliografía

Apunte IPS "Números Complejos". Código 1252

Matemática. Polimodal. Números y Sucesiones de Silvia Altmar, Claudia R Comparatore y Liliana Kurzrock. Editorial Longseller.Libro 3

Resolución de los problemas propuestos : **Prof.Juan Carlos Bue.**

Respuesta a los problemas presentados

1) a) x=2 pertenece a : N;Z;Q. b) x=$-\frac{\sqrt{2}}{3}$ pertenece a : I

c) x=-1 pertenece a : Z;Q d) x=$1-\sqrt{3}$ pertenece a :I

e) x=$\pm\frac{5}{2}$ pertenece a : Q . f) x= $-\frac{11}{21}$ pertenece a : Q

2) a) x=$\pm 5i$ b) x_1=2+i x_2=2-i

3)

Z_i	Forma binómica del Z_i	$Re(Z_i)$	$Im(Z_i)$
Z_1	$5-\frac{1}{2}i$	5	$-\frac{1}{2}$
Z_2	$-1+\pi i$	-1	π
Z_3	$\frac{3}{4}i$	0	$\frac{3}{4}$
Z_4	11	11	0

4) x=$\frac{7}{2}$ y=-4

5) no se presentan las demostraciones correspondientes a este problema

6) a) $\frac{5}{2}i$ b) $-\frac{5}{2}-7i$ c) $20+\frac{3}{2}i$ d) $-3+\frac{25}{2}i$ e) $-\frac{41}{2}-\frac{23}{2}i$ f) $-11+4i$

7) a) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ b) $\frac{1}{8}-\frac{3}{8}i$ c) 1 d) 8+32i

8) a) - i b)1 c) - i

9) a) $\overline{X}=-\frac{5}{52}-\frac{1}{52}i$ b) $-W=-\frac{2}{125}-\frac{136}{125}i$ c) X = - 1 – 3i

10) b = ± 8

11) z = 5 + 3i ; t = 5 – 3i

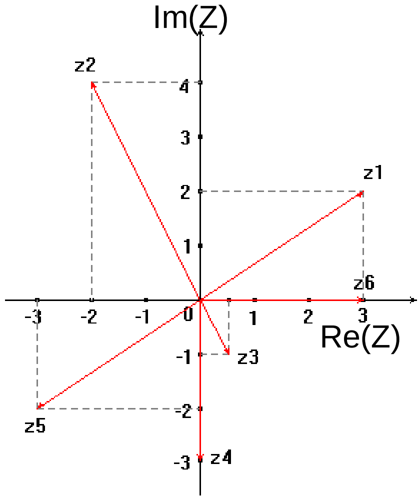
12) a) – i b) –1 c) – i

13) a) $x = -\frac{6}{5}$ b) $x = \frac{15}{2}$

14) i) $2 + i$; $4 + 2i$ entre otros. (Existen infinitas posibilidades)

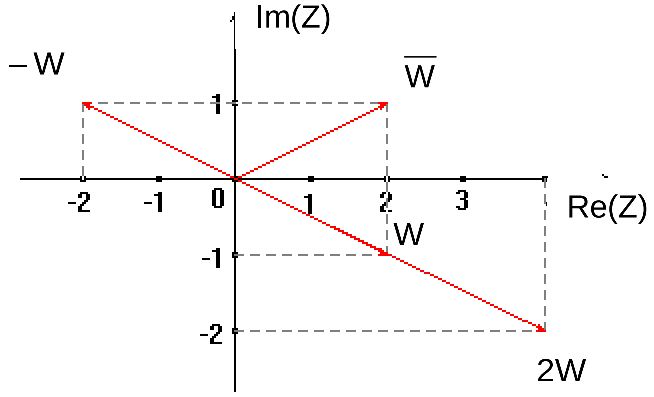
ii) $2 + 8i$; $3 + 12i$ entre otros. (Existen infinitas posibilidades)
iii) $\sqrt{29}\,i$; ai donde $a = 5{,}12122122212222...$ entre otros. (Existen infinitas posibilidades)

15)



16)a) $|W| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
El módulo al cuadrado de un complejo es igual a su norma.

b)



17) a) $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \omega = 45^{o}$

b) $\operatorname{tg}\omega = \frac{0}{-1{,}5} = 0 \Rightarrow \omega = 180^{o}$ pues $a < 0$

c) $\operatorname{tg}\omega = \frac{-3}{\frac{1}{2}} = -6 \Rightarrow \omega = 279^{o}\,27'\,44'',3$

18) a) $Z = \sqrt{2}_{\,45^{o}}$ b) $W = 1{,}5_{\,180^{o}}$ c) $V = \frac{\sqrt{37}}{2}_{\,279^{o}\,27'\,44'',3}$

19) a) Forma Polar: $Z = \sqrt{2}_{\,45^{o}}$ Forma Trigonométrica: $\sqrt{2}\operatorname{cis}45^{o}$

b) Forma Polar: $Z = \sqrt{5}_{\,26^{o}\,33'\,54'',18}$

Forma Trigonométrica: $\sqrt{5}\operatorname{cis}26^{o}\,33'\,54'',18$

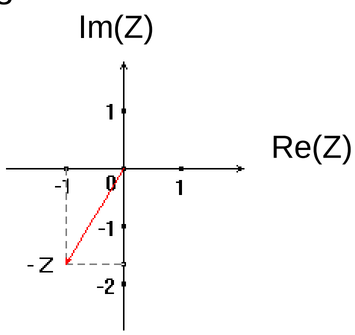
20) a) Z = 2,7 + 1,3i b) Z = $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

21) $Z.W - V = \sqrt{349}_{\,15^{o}\,31'\,26'',8}$

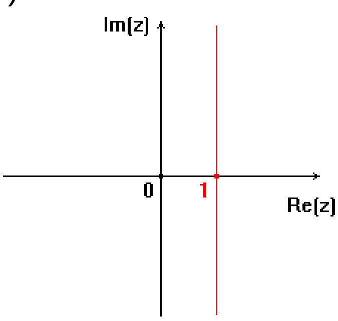
$W : V = -\frac{5}{3}i$

$W - Z + 2V = \sqrt{113}\operatorname{cis}131^{o}\,11'\,9'',33$

22) $\overline{Z} = 1 - \sqrt{3}i$

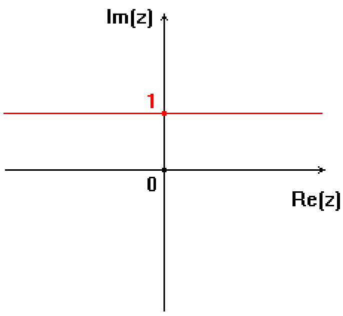


23) a)Z = 1 + bi



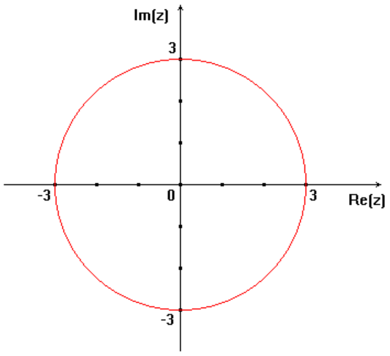
Recta paralela al eje imaginario que corta al eje real en 1

b) Z = a + i



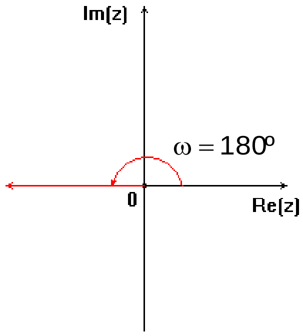
Recta paralela al eje real que corta al eje imaginario en 1

c) $|Z| = 3$



Sobre la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio 3 unidades

d) $Z = |Z|_{180^\circ}$



Sobre el semieje real negativo

24) Siendo Z = a + bi

a) $(b = 0 \wedge a \neq 0) \vee |Z| = 1$

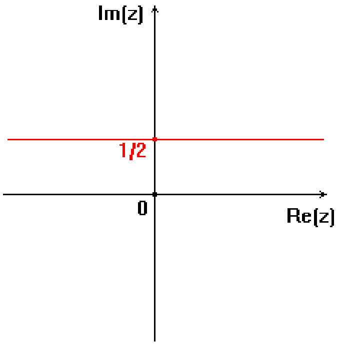
b) $Z_1 = 1 \vee Z_2 = \frac{1}{2} + i$

c) $Z = -i$

d) $Z = a + ai \ ; \ \forall a \in R$

e) no existe z

25) Son $Z = a + \frac{1}{2}i \ ; \ \forall a \in R$



26)

a) $Z \in A$
b) $V \notin A$
c) $W \in A$

27) a)Falso, Ej. Z=2=$\overline{Z}$ b)Falso ,Ej Z=0 c)Verdadero
d) Falso, Ej (2i) (3i)= -6 no es un imaginario puro e)Verdadero

28) $k = \pm 10$

29) $Z_1 = 4 + 3i \ ; \ Z_2 = 4 - 3i$

30) a) $Z = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i \ ; \ W = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$ b) $Z = 2 + \frac{7}{2}i \ ; \ W = \frac{1}{2}$

31) $Z = 0 \vee Z = -2 \vee Z = 1 + \sqrt{3}i \vee Z = 1 - \sqrt{3}i$

32) $Z = 1 + \frac{1}{2}i$

33) $|Z| = |W^2| = 25$ y $Arg(Z) = Arg(W^2) = 40^\circ$; $|W| = 5$ y $Arg(W) = 20^\circ$

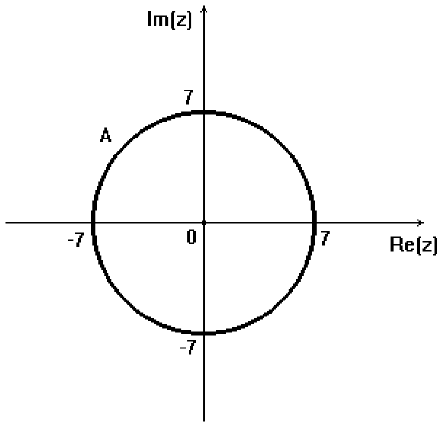
34) a) $z_1.z_2 = 2\sqrt{3}_{330^\circ}$ b) 0,4.(cos30º + i.sen30º)

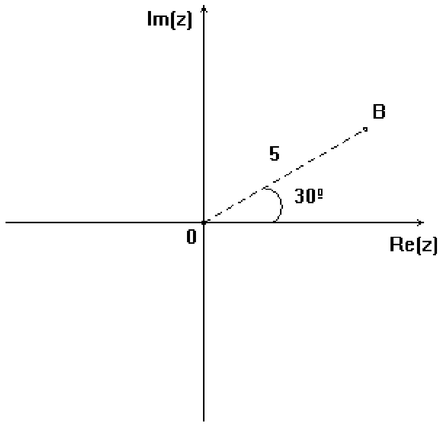
c) $\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{2}i$ d) arg(w)=114º 20’ 34’’

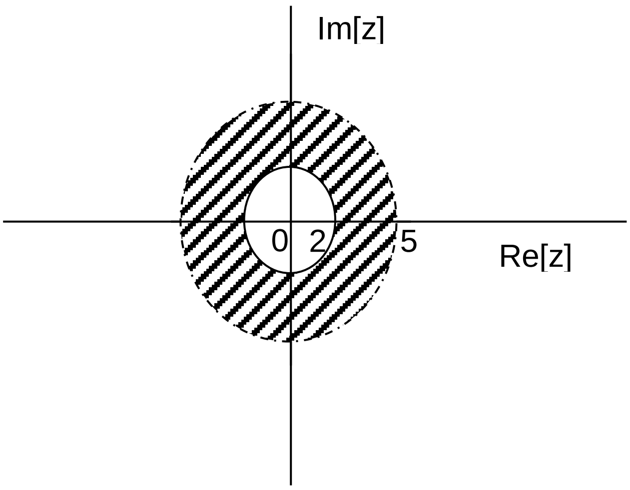
35)a) $Z_1=\sqrt{5}(\cos 153º26'5'' + i\,\mathrm{sen}\,153º26'5'')$

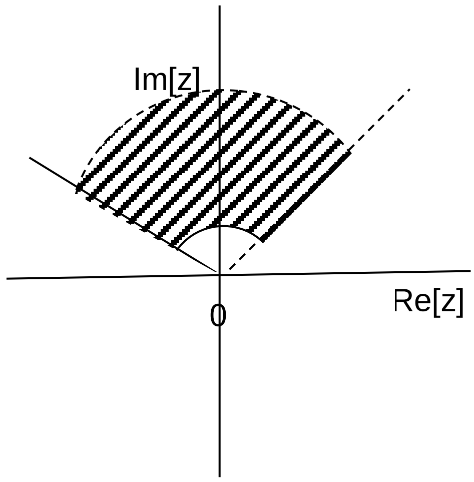
b) $-Z_2=\sqrt{10}\left(\cos 198º26'5'' + i\,\mathrm{sen}\,198º26'5''\right)$

36)









37) a) Z = 2-3i b)Z = 5-2i c) Z=7+bi ∀ b

38) sí, se verifica

40) 0º