Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Relaciones Métricas

1º Año

Cód. 1104-18

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

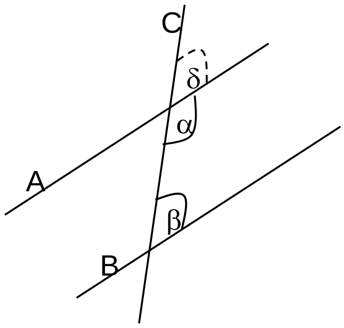
1. *PROPIEDAD DE LOS ÁNGULOS CONJUGADOS*

“Los ángulos conjugados internos (externos) determinados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera son suplementarios”.

Para realizar la demostración partimos de ciertos datos o información ***(HIPÓTESIS)*** que se consideran verdaderos y llegamos a un resultado o conclusión ***(TESIS)*** mediante el razonamiento ***(DEMOSTRACIÓN)***

Datos o hipótesis: H) $A // B$ y C transversal

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son conjugados internos



Tesis: T) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 2R$

Demostración: D)

Consideramos un ángulo auxiliar $\hat{\delta}$ adyacente al ángulo $\hat{\alpha}$

Completa :

AFIRMACIONES | JUSTIFICACIONES

(1) $\hat{\alpha} + \hat{\delta} = ...$ pues...

.

(2) $\hat{\delta} = ...$ pues son ………………………….entre $A // B \setminus C$

$\hat{\alpha} + ... = ...$ sustituimos en (1) por (2)

Con lo que queda demostrada la propiedad para ángulos conjugados internos.

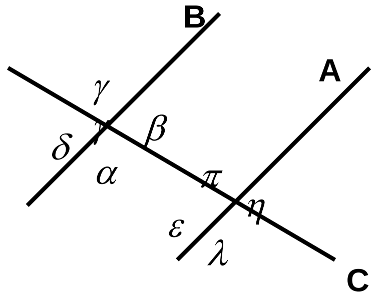
Te proponemos que realices la demostración para los ángulos conjugados externos

ACTIVIDADES

1) Si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos conjugados internos entre rectas paralelas intersecadas por una tercera y $\hat{\alpha} = \frac{2}{3}\hat{\beta}$. Calcula la medida de los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

2) Los ángulos $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\omega}$ son conjugados externos entre paralelas y la medida de $\hat{\varepsilon}$ es la cuarta parte de la medida de $\hat{\omega}$. Calcula $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\omega}$.

3) Siendo A // B $\nparallel$ C, <u>para cada apartado,</u> calcula la medida de los ángulos indicados en la figura.



a) $\hat{\pi} = 110°25'$

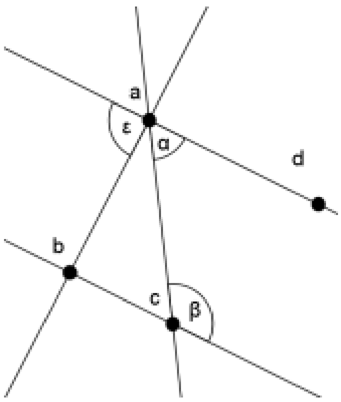
b) $\hat{\gamma} = 3\,\hat{\eta}$

c) $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{6}\hat{\pi}$

d) $\hat{\varepsilon} = 3x$ y $\hat{\gamma} = 12x$

4) Siendo $\overleftrightarrow{ad} // \overleftrightarrow{bc}$:

Calcula en cada apartado, según los datos, la medida de los ángulos interiores del $\overset{\Delta}{abc}$



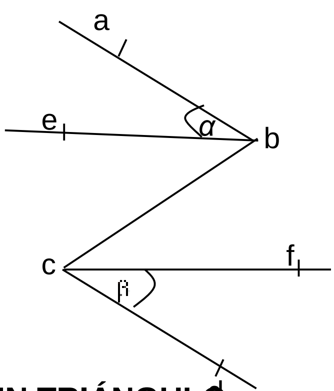
a) $\hat{\alpha} = 29°35'18''$ y $\overrightarrow{ac}$ bisectriz de $\widehat{bad}$

b) $\hat{\alpha} = 2x + 30°$; $\hat{\beta} = 6x$ y $\hat{\varepsilon} = 5x$

5) Sabiendo que $\overleftrightarrow{ab} \perp \overleftrightarrow{bc}$ y $\overleftrightarrow{bc} \perp \overleftrightarrow{cd}$ y $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$
Demostrar que:

a) $\overleftrightarrow{ab} // \overleftrightarrow{cd}$

b) $\overleftrightarrow{be} // \overleftrightarrow{cf}$

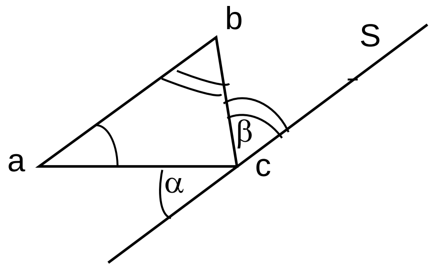


2. SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

TEOREMA:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es un llano, o sea 2 R

Datos o hipótesis: H) $\overset{\Delta}{abc}$
Conclusión o tesis: T) $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=2R$
Demostración: D)



Consideramos una recta S paralela al lado opuesto $\overline{ab}$ que pase por un vértice c .
Quedan determinados dos ángulos consecutivos al $\hat{c}$ que llamaremos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

Completa para obtener la demostración

AFIRMACIONES	JUSTIFICACIONES
(1) $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{c}=$..........	pues..
$\hat{\alpha}=\hat{a}$	son...
$\hat{\beta}=$........	son alternos internos entre $\overleftrightarrow{ab}$// S ∕\ $\overleftrightarrow{bc}$
$\hat{a}+$.......... .+.......... ... =..........	sustituimos en (1) $\hat{\alpha}$ por $\hat{a}$ y $\hat{\beta}$ por $\hat{b}$

con lo que queda demostrado el teorema.

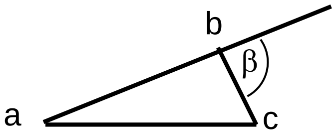
Observación: como habrás notado, la demostración de este teorema supone la aceptación del quinto postulado de Euclides: *por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a dicha recta*

3. TEOREMA DEL ANGULO EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO

Todo ángulo exterior de un triángulo es congruente con la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes y mayor que cualquiera de ellos

H) $a\overset{\Delta}{b}c$ y $\hat{\beta}$ ángulo exterior de $\hat{b}$

T) $\hat{\beta} = \hat{a} + \hat{c}$; $\hat{\beta} > \hat{a}$: $\hat{\beta} > \hat{c}$



Demostración:

(1) $\hat{\beta} + \hat{b} = 2R$ porque ……………………………………………………………..

(2) $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2R$ porque …………………………………………………………..

Igualando las expresiones (1) y (2) resulta

$$\hat{\beta} + \hat{b} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$$

Observamos que a ambos miembros está sumando el mismo ángulo por lo tanto

$$\hat{\beta} = \hat{a} + \hat{c}$$

Además el resultado de una suma es mayor que cada sumando por lo tanto

$\hat{\beta} > \hat{a}$ y $\hat{\beta} > \hat{c}$

4. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Contesta las siguientes propuestas justificando tu respuesta:

En el triángulo $a\overset{\Delta}{b}c$

- ¿qué clase de ángulos serán $\hat{b}$ y $\hat{c}$ si $\hat{a}$ es recto u obtuso?. ....

....

- si $\hat{a}$ es recto ¿qué puedes decir de $\hat{b}$ y $\hat{c}$?...

....

La respuesta a estas cuestiones constituye la demostración de los corolarios del teorema que a continuación enunciamos.

> *Sólo un ángulo de un triángulo puede ser recto u obtuso*

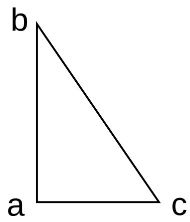
> *Si un ángulo de un triángulo es recto, los otros dos son complementarios*

5.1 Según sus ángulos

Estas propiedades permiten efectuar una clasificación de los triángulos atendiendo a sus ángulos.

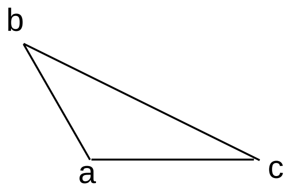
Podemos definir:

> Todo triángulo con un ángulo recto se denomina **rectángulo**



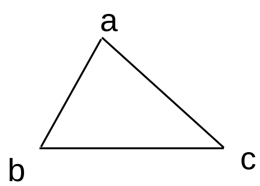
A los lados del ángulo recto se los denomina ***catetos***, al lado opuesto al ángulo recto, ***hipotenusa***

> Triángulo **obtusángulo** es el que posee un ángulo obtuso



Resulta, de acuerdo con uno de los corolarios anteriores que el triángulo obtusángulo posee dos ángulos agudos.

> *Triángulo **acutángulo** es el que posee los tres ángulos agudos*



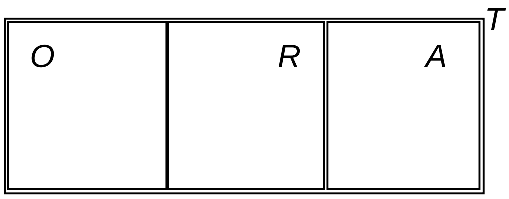
En base a estas definiciones, en el conjunto de los triángulos pueden distinguirse los siguientes subconjuntos no vacíos.

$T = \{\text{triángulos}\}$

$O = \{\text{triángulos obtusángulos}\}$

$R = \{\text{triángulos rectángulos}\}$

$A = \{\text{triángulos acutángulos}\}$



Observa que:

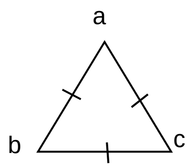
$$\left.\begin{array}{l} O \cap R = \varnothing \\ R \cap A = \varnothing \\ O \cap A = \varnothing \\ O \cup R \cup A = T \end{array}\right\} \Rightarrow$$

O, R y *A* determinan una partición de T en 3 subconjuntos

5.2 Según sus lados

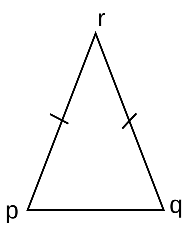
Teniendo en cuenta la clasificación de los triángulos según sus lados:

Todo triángulo que posee sus tres lados congruentes se denomina **equilátero**



$$\overline{ab} = \overline{ac} = \overline{bc}$$

Todo triángulo que posee al menos dos de sus lados congruentes se denomina **isósceles**

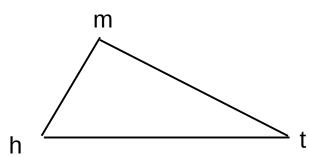


$\overline{rp} = \overline{rq}$

El lado $\overline{pq}$ es **base**

En un triángulo isósceles al lado desigual se lo llama **base**

Todo triángulo que no posee ningún par de lados congruentes se denomina **escaleno**



Simbolizamos a los conjuntos:

I = { triángulos isósceles}

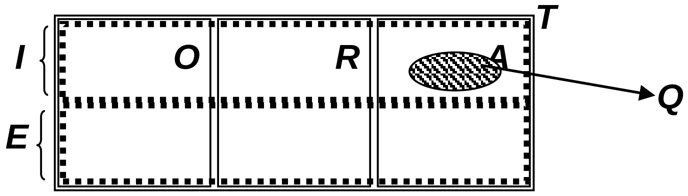
E = { triángulos escalenos}

Q = { triángulos equiláteros }

De la definición, es inmediato que:

$$Q \subset I \qquad I \cap E = \varnothing \qquad \wedge \qquad I \cup E = T$$

En un mismo diagrama se muestra la partición de *T* (según sus ángulos) en 3 subconjuntos, en forma vertical, y su partición en 2 subconjuntos (según sus lados), en forma horizontal; ubicando el conjunto de los triángulos equiláteros incluido en $A \cap I$



⇨ Justifica por qué $Q \subset (A \cap I)$

⇨ En el diagrama de clasificación de los triángulos, marca como se te indica, dónde se encuentra un triángulo con las características siguientes:

- Rectángulo isósceles, con un º
- Rectángulo escaleno, con un ®
- Obtusángulo isósceles, con un ⊗
- Obtusángulo escaleno, con un ∅
- Isósceles equiángulo, con un *

ACTIVIDADES

1) Indica las características geométricas de los triángulos pertenecientes a cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $O \cap I$ c) $I \cap A$ e) $R \cap E$
b) $R \cap I$ d) $E \cap A$ f) $Q \cap A$

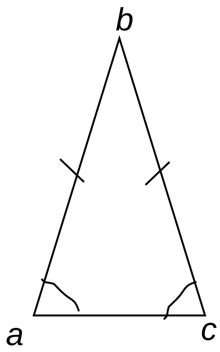
2) Establece la falsedad o veracidad de cada una de las siguientes expresiones, justificando tu respuesta

a) $a\overset{\Delta}{b}c$ equilátero $\Rightarrow$ $a\overset{\Delta}{b}c$ isósceles

b) $a\overset{\Delta}{b}c$ isósceles $\Rightarrow$ $a\overset{\Delta}{b}c$ equilátero

c) $a\overset{\Delta}{b}c$ rectángulo e isósceles $\Rightarrow$ $a\overset{\Delta}{b}c$ equilátero

5. **PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES**:



Los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son congruentes

Se puede justificar también que:

Es suficiente que un triángulo posea dos ángulos congruentes para asegurar que es isósceles

Las dos últimas propiedades pueden reunirse estableciendo que:

En todo triángulo a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes y recíprocamente

⇨ Demuestra que todo triángulo equilátero es equiángulo

ACTIVIDADES

En lo sucesivo, encontrarás problemas cuyo enunciado se individualiza con el símbolo ($*$). Esto significa que es una propiedad muy importante en la resolución de futuros problemas

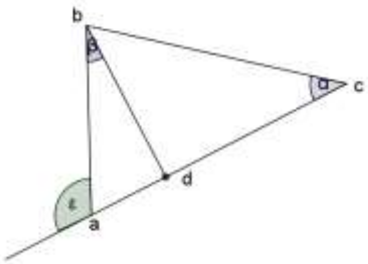
1) Dado $\overline{ab}$, construye un triángulo isósceles de base $\overline{ab}$ ¿Es único?

2) Calcula la medida de los ángulos de cualquier triángulo rectángulo isósceles.

3) ($*$) Demuestra que si los ángulos conjugados internos (externos) entre 2 rectas coplanares intersecadas por una tercera son suplementarios, dichas rectas son paralelas.

4) Demuestra que las bisectrices de los ángulos conjugados internos entre paralelas son perpendiculares.

5)

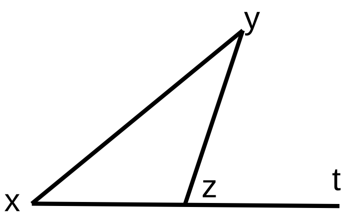


En la figura $b\overset{\triangle}{d}c$ es rectángulo en $\hat{d}$,

$\hat{\alpha} = 40º$ y $\hat{\beta} = 26º$

Halla la medida de $\hat{\varepsilon}$, $b\hat{a}c$ y $a\hat{b}c$.
Justifica los pasos que realiza

6)

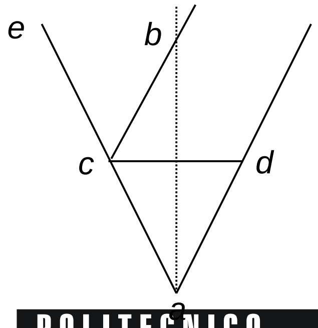


Si *z* punto medio de $\overline{xt}$ y $\overline{zt} = \overline{zy}$

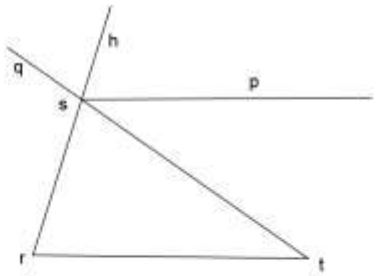
demuestra que $\widehat{x} = \dfrac{1}{2}\, y\hat{z}t$

7) En la figura es $\overrightarrow{ab}$ bisectriz de $c\hat{a}d$, $\overrightarrow{cb}$ bisectriz de $e\hat{c}d$; $c\hat{a}d = 32°$ y $c\hat{d}a = 51°$

Calcula la medida de $b\hat{c}d$



8) Calcula la medida de los ángulos interiores del $\overset{\Delta}{rst}$,sabiendo que $\overleftrightarrow{rt} \,//\, \overleftrightarrow{sp}$, $\widehat{qsh} = 81^{\circ}$ y $\widehat{pst} = 34^{\circ}$.Justifica el procedimiento que realizas



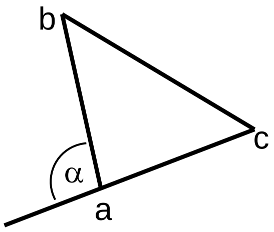
9) Si $a\overset{\Delta}{b}c$ es isósceles con $\overline{ab} = \overline{bc}$ y $\hat{b} = 68^{\circ}\, 20'\, 12''$

a) calcula la medidas de $\hat{a}$ y $\hat{c}$.

b) determina la medida del ángulo exterior correspondiente al $\hat{c}$

10) En un triángulo $m\overset{\Delta}{n}p$ es $\hat{m} = \frac{2}{3}\hat{p}$ y $\hat{p} = \hat{n}$. Determina las medidas de cada uno de los ángulos del triángulo.

11)



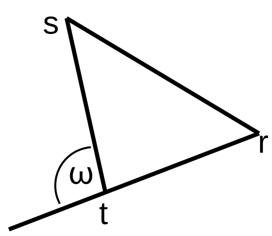
Sabiendo que $\hat{b} = \hat{c}$ y $\hat{\alpha} = 102^{\circ},6$; calcula cada uno de los ángulos del triángulo.

12) En un triángulo, un ángulo interior es de 35º 40’ y un ángulo exterior no adyacente a él es de 150º 10’. Determina la medida de los otros dos ángulos interiores.

13) Calcula la medida de los ángulos interiores del triángulo $\overset{\Delta}{rst}$ y del ángulo exterior $\hat{\omega}$ ubicados según muestra el gráfico, para cada caso:

a) $\hat{r} = 2\hat{x} + 14^{\circ}$ $\quad \hat{s} = 5\hat{x} - 3^{\circ}$ $\quad \hat{t} = 6\hat{x} + 13^{\circ}$

b) $\hat{\omega} = 3\hat{x} + 46^{\circ}$ $\quad \hat{t} = 6\hat{x} - 28^{\circ}$ $\quad \hat{r} = \hat{s}$



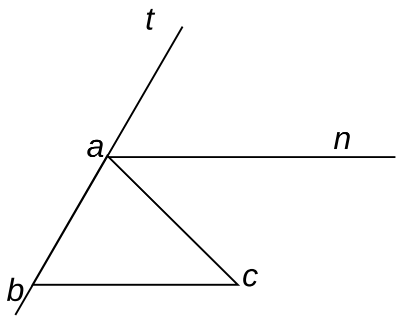
c) $\hat{\omega} = 145º$ $\qquad \hat{r} = 2\hat{x}$ $\qquad \hat{s} = 2\hat{r}$

14) En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos es el cuádruplo del otro. ¿Cuál es la medida de cada uno de ellos?

15) ($*$) Demuestra que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°

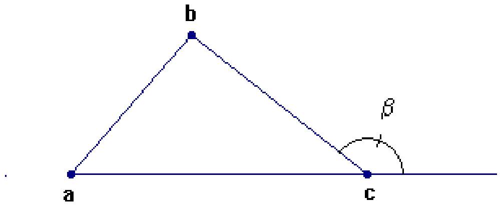
16) Si $\overleftrightarrow{an} // \overleftrightarrow{bc}$ y $\overrightarrow{an}$ biseca a $t\hat{a}c$

demuestra que $\overset{\Delta}{abc}$ es isósceles



17) Si el ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles es de 114º, calcula los ángulos de la base.

18) Si $b\hat{a}c = 48°22'32''$; $a\hat{b}c = 3b\hat{a}c - 90°35'$. Calcula: $a\hat{b}c$; $\hat{\beta}$ y $b\hat{c}a$.

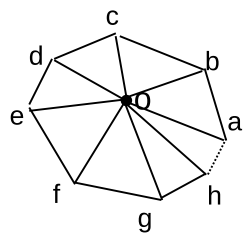


6. ÁNGULOS INTERIORES Y EXTERIORES DE UN POLÍGONO CONVEXO

7.1 Suma de los ángulos interiores de un polígono

⇨ Dibuja un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono y un octógono, toma en cada uno de ellos un punto interior y únelo con segmentos a sus vértices ¿Cuántos triángulos quedan determinados?..............................
¿Qué regularidad descubres?..
....

Consideremos un polígono convexo cualquiera de *n* lados, se observa que al trazar todos los segmentos desde un punto interior del mismo, queda descompuesto en *n* triángulos.



La suma de los ángulos interiores de dichos triángulos será 2R n.
Entonces la suma de los ángulos interiores del Polígono de n lados, que simbolizamos con S_n resulta:

$S_n = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} + ... = 2Rn - 4R$ (4R es la suma de los ángulos de vértice o)

Expresando 4 R = 2. 2R

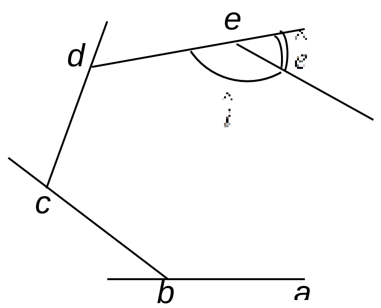
$S_n = \mathbf{2R}n - 2.\mathbf{2R} = 2R.(n - 2)$ (Por Propiedad distributiva)

$$\boxed{S_n = 2\,R\,.(n - 2)}$$

7.2 Suma de los ángulos exteriores de un polígono

La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es de 4 R

⇨ Completando estas proposiciones demostrarás esta propiedad



En cada vértice un ángulo interior ($\hat{i}$) y su exterior correspondiente ($\hat{e}$) suman ....

o sea $\hat{i} + \hat{e}$ =.................. (*)

En un polígono de *n* lados, hay .... vértices, en cada vértice existe un ángulo interior y uno exterior que verifican (*) por lo cual la suma de todos los ángulos interiores (S_n) y la de todos los exteriores (S_e) es............, o sea

$$S_n + S_e = 2\ R\ .\ n \quad (1)$$

y como se sabe que $S_n = 2\ R\ .n - 4R$ reemplazando en (1)

resulta : $2R.n - 4R + S_e = 2Rn \quad \Rightarrow \quad S_e = 2R\ n - 2R\ n + 4R$

o sea : $S_e = 4R$

ACTIVIDADES

1) En un cuadrilátero abcd es $\hat{a} = 2\hat{b},\ \hat{c} = \hat{d} = 3\hat{b}$. Determina la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero.(Sugerencia : plantea la ecuación en función del $\hat{b}$)

2) En un hexágono tres de sus ángulos interiores suma 427º 49´ 15´´. Los otros tres ángulos son congruentes. ¿Cuál es la medida de cada uno de esos ángulos?

3) ¿En qué polígono la suma de sus ángulos interiores es de 1080º?

4) Completa la siguiente tabla

n	S_n
3	....
13	....
....	1800º
....	2340º
....	3240º
....	30 R

5) Determina la medida de un ángulo interior de

a) un pentágono regular

b) un heptágono regular

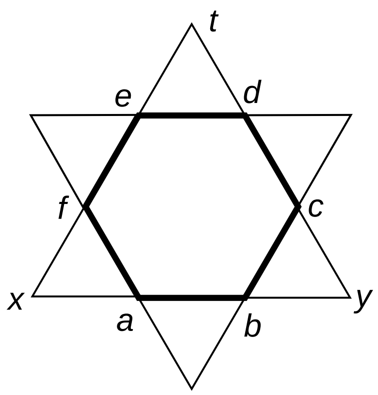
6) ¿En qué polígono regular el ángulo exterior es $\frac{1}{5}$ del ángulo interior adyacente a él?

7) Si contestas afirmativamente las siguientes preguntas, agrega cuántos lados tiene el polígono regular en ese caso:

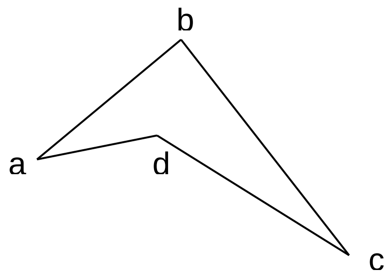
a) ¿Puede ser 45º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
b) ¿Puede ser 100º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
c) ¿Puede ser 140º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
d) ¿Puede ser 60º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
e) ¿Puede ser 135º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
f) ¿Puede ser 156º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?

8) Sea el hexágono regular de la figura *abcdef.*

Demuestra que $\overset{\triangle}{xyt}$ es equilátero.



9) Demuestra que el cuadrilátero abcd, la suma de los ángulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$ es igual al ángulo convexo $\hat{d}$.



La revisión y actualización de este apunte estuvo a cargo de los profesores: Verónica Filotti y María del Luján Martínez

Bibliografía:

- GEOMETRÍA METRICA- RELACIONES MÉTRICAS de Susana S. de Hinrichsen, Noemí B. de González Beltrán y Liliana L de Cattaneo
- TRIGONOMETRÍA de Juan Carlos Bue, Daniela Candio, Verónica Filotti, Noemí Lagreca y Ma. del Luján Martínez. Impreso por Recursos del IPS
- TRIGONOMETRÍA de : A. Nassini ,L de Cattaneo y N. Buschiazzo.

- MATEMATICA 1 (9º Edición) de Ana M. Bogani, Elsa Di Estévez y Mary G. Oharriz. Editorial Plus Ultra. Año 1995
- Carpeta de Matemática 8 (1º edición)de Garaventa, Legorburu, Rodas y Turano. Editorial Aique. Año 2001